

# Examen de mi-parcours OMI 1E1

Notes de cours et notes de TD autorisées  
Calculatrices interdites

Octobre 2021

## 1 Fonctions continues

On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des fonctions continues sur  $[0, 1]$  muni de la norme uniforme

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

1) Montrer que

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}, \forall t \in [0, 1], f(t) \geq 0 \right\}$$

est fermé dans  $\mathcal{C}$ .

2) Montrer que

$$U = \left\{ f \in \mathcal{C}, \forall t \in [0, 1], f(t) > 0 \right\}$$

est ouvert dans  $\mathcal{C}$ .

## 2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

On considère  $\mathcal{C}^1$  l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur  $[0, 1]$ . On rappelle que l'on a

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s) \, ds.$$

On munit  $\mathcal{C}^1$  de la norme

$$\|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

On considère  $(f_n, n \geq 1)$  une suite de Cauchy pour cette norme.

3) Montrer qu'il existe  $f$  et  $g$  continues telles que

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_\infty &\longrightarrow 0, \\ \|f'_n - g\|_\infty &\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

4) Montrer que  $f$  est dérivable et que  $f' = g$ .

5) Quel résultat a-t-on montré ?

6) Montrer que l'ensemble des polynômes est dense dans  $\mathcal{C}^1$ .

On pose

$$f_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}.$$

7) Etudier la convergence de la suite  $(f_n, n \geq 1)$  dans  $\mathcal{C}$ .

8) Pour tout  $n \geq 1$ , calculer

$$\sup_{t \in [0,1]} t^n(1-t).$$

9) Etudier la convergence de la suite  $(f_n, n \geq 1)$  dans  $\mathcal{C}^1$ .

On considère maintenant

$$\mathcal{C}_0^1 = \mathcal{C}^1 \cap \{f, f(0) = 0\}$$

muni de la même norme que  $\mathcal{C}^1$ .

10) Montrer que  $\mathcal{C}_0^1$  est un espace de Banach.

On considère la forme linéaire

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{C}_0^1 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ f &\longmapsto \int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt.\end{aligned}$$

11) Montrer que

$$|\Phi(f)| \leq \|f'\|_\infty \int_0^1 |\ln(u)| du$$

*Indication : on pourra utiliser le théorème de Fubini ou une formule d'intégration par parties.*

12) Montrer que

$$\|\Phi\| = 1.$$

### 3 Fonctions $\mathcal{C}^\infty$

Sur  $\mathcal{C}^\infty$ , l'ensemble des fonctions indéfiniment continûment dérivables sur  $[0, 1]$ , on met la distance

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\min(1, \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty)}{2^k},$$

où  $f^{(k)}$  est la dérivée  $k$ -ième de  $f$ . On note  $\pi_k$  la projection

$$\begin{aligned}\pi_k : \mathcal{C}^\infty &\longrightarrow \mathcal{C} \\ f &\longmapsto f^{(k)}.\end{aligned}$$

Pour  $M > 0$ , on note

$$E_M = \{f \in \mathcal{C}^\infty, \|f^{(k)}\|_\infty \leq M, \forall k \geq 0\}.$$

On a donc

$$\pi_k E_M = \{g \in \mathcal{C}, \exists f \in E_M \text{ tel que } g = f^{(k)}\}.$$

- 13) Montrer que si  $(f_n, n \geq 1)$  converge vers  $f$  pour la distance  $d$  alors pour tout  $k \geq 0$ ,  $(f_n^{(k)}, n \geq 1)$  converge uniformément vers  $f^{(k)}$ .
- 14) Montrer que pour tout  $k \geq 0$ ,  $\pi_k E_M$  est borné et équi-continu.

## Correction

**1 ▷** La convergence uniforme entraîne la convergence simple donc

$$\forall t, f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \geq 0.$$

**2 ▷** Soit  $f \in U$ ,  $f$  est continue donc atteint sa borne inférieure donc il existe  $t_0$  tel que

$$0 < f(t_0) \leq f(t), \forall t.$$

La boule  $B(f, f(t_0)/2)$  est dans  $U$  donc  $U$  est ouvert.

**3 ▷**  $f_n$  et  $f'_n$  sont de Cauchy dans  $\mathcal{C}$  donc convergent.

**4 ▷** On a

$$f_n(t) = f_n(0) + \int_0^t f'_n(s) \, ds.$$

Comme la convergence de  $f'_n$  vers  $g$  est uniforme, on a en passant à la limite,

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s) \, ds.$$

On en déduit que  $f$  est dérivable et  $f' = g$ .

**5 ▷** On a montré que  $\mathcal{C}^1$  est complet.

**6 ▷** Le théorème de Stone-Weierstrass assure que l'on peut trouver une suite de polynômes  $(P_n, n \geq 1)$  qui converge uniformément vers  $f'$ . La primitive d'un polynôme est un polynôme donc la suite de polynômes

$$Q_n(x) = f(0) + \int_0^x P_n(s) \, ds$$

convient.

**7 ▷** On a

$$|f_n(t)| \leq \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc  $f_n$  converge dans  $\mathcal{C}$  vers la fonction nulle.

**8 ▷** L'étude de la fonction montre qu'elle atteint son maximum en  $n/(n+1)$  et que l'on a donc

$$\sup_{t \in [0,1]} t^n(1-t) = \frac{1}{n+1} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$$

**9 ▷** On sait déjà que  $f_n$  tend vers 0, si l'on veut la convergence dans  $\mathcal{C}^1$ , il reste à prouver que  $f'_n$  tend aussi uniformément vers 0. Or

$$f'_n(t) = t^n(1-t).$$

Comme

$$\frac{1}{n+1} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{n+1} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^n \sim \frac{e^{-1}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

on a bien le résultat voulu.

**10 ▷** C'est un fermé dans un Banach (cf Question 5) donc un Banach.

**11 ▷** Avec Fubini, on a directement

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt &= \int_0^1 \frac{1}{t} \int_0^t f'(u) du dt \\ &= \int_0^1 f'(u) \int_u^1 \frac{1}{t} dt du \\ &= - \int_0^1 f'(u) \ln(u) du. \end{aligned}$$

La majoration vient facilement.

Avec la formule d'intégration par parties, on doit d'abord montrer que

$$|f(t)| \leq \int_0^t \|f'\|_\infty \, du \leq \|f'\|_\infty t$$

(dans un voisinage de 0) et donc que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) \ln(t) = 0.$$

**12 ▷** On prend la fonction  $(t \mapsto t)$  et comme

$$\int_0^1 \ln(u) \, du = -1$$

on obtient le résultat voulu.

**13 ▷** On fixe  $1 > \epsilon > 0$  et  $k \geq 0$ . Pour  $n \geq n_k$ ,  $d(f_n, f) < \epsilon 2^{-k}$  donc

$$\min(1, \|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty) \leq \epsilon.$$

Comme  $\epsilon < 1$  cela implique

$$\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \leq \epsilon,$$

pour  $n \geq n_k$ .

**14 ▷** Par construction,  $\|f^{(k)}\|_\infty \leq M$  pour tout  $f \in E_M$  donc  $\pi_k E_M$  est borné. D'autre part,  $\|f^{(k)'}\|_\infty = \|f^{(k+1)}\|_\infty \leq M$  donc  $\pi_k E_M$  est équicontinu.