

L. DECREUSEFOND

ANALYSE
FONCTIONNELLE
&
ANALYSE
CONVEXE

EXERCICES

Copyright © 2024 L. Decreusefond

License : Creative Commons BY-NC-SA

March 2024

Table des matières

1	Topologie des espaces métriques	5
2	Espaces vectoriels normés	13
3	Séparation et optimisation	17
4	Espaces de Hilbert	23
	Correction des exercices	31

1

Topologie des espaces métriques

Exercice 1 — Dénombrabilité. On note $\mathbf{Q}[X_1, X_2]$ l'ensemble des polynômes à deux variables à coefficients dans \mathbf{Q} . Un tel polynôme de degré n est de la forme

$$P(X_1, X_2) = \sum_{i+j \leq n} a_{i,j} X_1^i X_2^j$$

où les coefficients a_{ij} sont tous des rationnels.

- 1.1) Montrer que cet ensemble est dénombrable.

Exercice 2 — Distances. Démontrer que l'application $d(u, v) = \frac{|u - v|}{1 + |u - v|}$ définit une distance sur \mathbf{R} .

Exercice 3 — Boules étranges. Soit $E =]0, +\infty[$. Pour $x, y \in E$, on note

$$\delta(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

- 3.1) Démontrer que δ est une distance sur E .
3.2) Déterminer $B(1, 1)$ pour cette distance.
3.3) La partie $A =]0, 1]$ est-elle bornée pour cette distance ? fermée ?
3.4) Déterminer les boules ouvertes pour cette distance.

Exercice 4 — Adhérence. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. Montrer que

$$d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}.$$

Exercice 5 — Adhérence, intérieur. Dans $(\mathbf{R}, | \cdot |)$, déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière (définie comme $\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$) des ensembles suivants :

5.1) \mathbf{N}

5.2) $] -1, 1[\setminus \{0\}$

5.3) $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \geq 1 \right\}$

Exercice 6 Soit $u = (u_n, n \geq 1)$ une suite de réels.

- 6.1) On suppose que u est croissante et qu'elle admet une suite extraite majorée. Que dire de u ?
- 6.2) On suppose que u est croissante et qu'elle admet une sous-suite convergente. Que dire de u ?
- 6.3) On suppose que u n'est pas majorée. Montrer que $+\infty$ est une valeur d'adhérence de u .

Exercice 7 Montrer que l'ensemble des matrices symétriques est un fermé de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 8 — limite supérieure et inférieure. Soit $u = (u_n, n \geq 1)$ une suite de réels. On définit

$$\liminf_n u_n = \sup_k \inf_{n \geq k} u_n$$

$$\limsup_n u_n = \inf_k \sup_{n \geq k} u_n.$$

- 8.1) Montrer que $\liminf_n u_n$ et $\limsup_n u_n$ sont bien définis comme des éléments de $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ et $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ respectivement.
- 8.2) Montrer que toutes les valeurs d'adhérence de la suite u sont nécessairement comprises entre $\liminf_n u_n$ et $\limsup_n u_n$.
- 8.3) Montrer que u converge si et seulement si

$$\liminf_n u_n = \limsup_n u_n.$$

Exercice 9 Deux distances d et δ sur un espace E sont dites équivalentes s'il existe $0 < c \leq C$ tels que

$$c \delta(x, y) \leq d(x, y) \leq C \delta(x, y).$$

Elles sont dites presque-équivalentes (p-e) si toute suite de E qui converge à la fois pour d et δ a la même limite dans les deux cas.

- 9.1) Montrer que si (E, d) et (E, δ) sont complets alors $(E, d + \delta)$ est complet si et seulement si d et δ sont p-e.

On suppose que d et δ sont p-e et que la suite $(x_n, n \geq 1)$ converge vers x dans (E, d) .

- 9.2) Montrer que cette suite ne peut avoir d'autre point d'accumulation que x dans (E, δ) .
 9.3) En déduire que si (E, δ) est compact alors cette suite converge vers dans (E, δ) .

Sur l'espace vectoriel des polynômes $\mathbf{R}[X]$, on définit les normes

$$N_\infty(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$$

$$N_a(P) = N_\infty(P) + |P(a)|$$

où $a > 1$. Soit $b > a > 1$.

- 9.4) Montrer que les normes N_a et N_b sont p-e mais pas équivalentes.

On pourra considérer les polynômes

$$Q_n(X) = X^n(1 - X) \text{ et } P_n(X) = Q_n(X)(X - a)$$

■

Exercice 10 Soit (E, d) un espace métrique compact et f une isométrie de E dans E :

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

- 10.1) Montrer que f est injective.
 10.2) Montrer que pour tout entier n , $f^n = f \circ \dots \circ f$ est une isométrie.

Soit $x \in E$, il nous faut montrer qu'il existe $y \in E$ tel que $f(y) = x$. On pose

$$x_n = f^n(x) = f(x_{n-1}).$$

10.3) Montrer qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)}, n \geq 1)$ telle que

$$d(x_{\varphi(n+1)}, x_{\varphi(n)}) = d(x_{\varphi(n+1)-\varphi(n)}, x).$$

10.4) En déduire que $x \in f(E)$. ■

Exercice 11 Soit f une fonction continue de période T . Montrer que f est uniformément continue. ■

Exercice 12 Soit f une fonction uniformément continue sur $]0, 1[$. Montrer que f est bornée. ■

Exercice 13 Soit f une fonction uniformément continue sur une partie $D \subset \mathbf{R}$. Soit $(x_n, n \geq 1)$ et $(y_n, n \geq 1)$ deux suites de D tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$.

13.1) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0.$$

Dire parmi ces fonctions celles qui sont uniformément continues.

13.2) $f(x) = 1/x$ sur $D = [1, +\infty[$

13.3) $f(x) = 1/x$ sur $D =]0, 1]$

13.4) $f(x) = \sin(x^2)$ sur \mathbf{R} ■

Exercice 14 — Ensembles compacts. Déterminer si les ensembles suivants sont compacts

14.1) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}, x^2 + y^4 = 1\}$

14.2) $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}, x^2 + y^5 = 1\}$

14.3) $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}, |x| + |y| \leq 1\}$ ■

Exercice 15 $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

15.1) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_n(\mathbf{R})^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^+ \\ (M, N) &\longmapsto \text{trace}({}^t M N) \end{aligned}$$

est bilinéaire, symétrique et telle que

$$\text{trace}({}^tMM) \geq 0 \text{ pour tout } M$$

avec égalité si et seulement si $M = 0$.

On dit alors que cette application est un produit scalaire.

15.2) Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\text{trace}({}^tMN)| \leq \sqrt{\text{trace}({}^tMM)} \sqrt{\text{trace}({}^tNN)}.$$

15.3) En déduire que l'application

$$\begin{aligned} N_H : \mathfrak{M}_n(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R}^+ \\ M &\longmapsto \sqrt{\text{trace}({}^tMM)} \end{aligned}$$

est une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$.

15.4) En déduire que l'ensemble des matrices orthogonales, i.e. telles que ${}^tMM = \text{Id}$, est compact.

■

Exercice 16 — Séparabilité. On dit qu'un espace topologique est *séparable* s'il existe une famille dénombrable, c'est-à-dire une suite, dense.

On rappelle que \mathbf{Q} est dense dans \mathbf{R} .

16.1) Montrer que $\mathbf{Q}[X]$ est dénombrable.

16.2) Construire une distance raisonnable sur $\mathbf{R}[X]$.

16.3) Montrer que $\mathbf{Q}[X]$ est dense dans $\mathbf{R}[X]$ pour cette distance.

16.4) Montrer que l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme uniforme est séparable.

■

Exercice 17 Montrer que l'ensemble des probabilités sur \mathbf{N} muni de la distance en variation totale est un espace métrique séparable complet.

■

Exercice 18 — Fonctions semi-continues inférieurement. Soit (E, d) un espace métrique, une fonction $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.) lorsque

$$L_\alpha = \left\{ x, f(x) \leq \alpha \right\}$$

est un fermé de E pour tout α .

18.1) Montrer que f est s.c.i. ssi pour tout $x \in E$ et pour toute suite $(x_n, n \geq 1)$ qui tend vers x dans E , on a

$$f(x) \leq \liminf_n f(x_n). \quad (1.1)$$

18.2) Quelle(s) borne(s) de l'intervalle $[a, b]$ inclure ou exclure de sorte que la fonction indicatrice qui en découle soit s.c.i.?

18.3) Si K est un compact de E , montrer que f est inférieurement bornée sur E .

18.4) En déduire qu'une fonction s.c.i. atteint son minimum sur un compact.

■

Exercice 19 — Ensemble de Mandelbrot. Pour $c \in \mathbf{C}$, on considère la suite

$$z_0(c) = 0, \quad z_{n+1}(c) = z_n(c)^2 + c.$$

Le complémentaire de l'ensemble de Mandelbrot, noté \mathcal{M} , est les points c du plan complexe pour lesquels cette suite diverge au sens où

$$\mathcal{M}^c = \left\{ c \in \mathbf{C}, \limsup_n |z_n(c)| = +\infty \right\}.$$

Notre objectif est de montrer que \mathcal{M} est compact.

19.1) Montrer par récurrence que si $|c| > 2$ alors

$$|z_n(c)| \geq |c|^n, \forall n \geq 1.$$

19.2) Trouver une boule de \mathbf{C} qui contient \mathcal{M} .

Le même raisonnement montre que s'il existe n_0 tel que $|z_{n_0}(c)| > 2$ alors

$$|z_{n_0+k}(c)| \geq |c|^k.$$

19.3) En déduire que

$$\mathcal{M} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{c, |z_n(c)| \leq 2\}. \quad (1.2)$$

19.4) Montrer que pour tout $n \geq 0$, l'application

$$c \longmapsto z_n(c)$$

est continue.

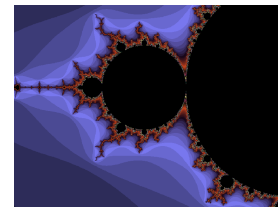


FIGURE 1.1: Ensemble de Mandelbrot \mathcal{M}

19.5) En déduire que \mathcal{M} est compact.

■

Exercice 20 — Fonctions càdlàg. On dit qu'une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ est càdlàg (continue à droite avec des limites à gauche) lorsque

$$\forall 0 < t \leq 1, f(t-) := \lim_{s \uparrow t} f(s) \text{ existe dans } \mathbf{R}$$

$$\forall 0 \leq t < 1, f(t) = \lim_{s \downarrow t} f(s).$$

On note

$$f_{st} = f(t) - f(s)$$

$$\text{Si } T \subset [0, 1], w_f(T) = \sup_{r, s \in T} |f_{rs}|,$$

le module de continuité de f . Pour f càdlàg donnée et $\epsilon > 0$, on dit que l'intervalle $[0, a]$ décomposable s'il existe v et

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_v = a \quad (1.3)$$

tels que

$$w_f([t_i, t_{i+1}[) \leq \epsilon, \text{ for all } i = 0, \dots, v-1.$$

On veut montrer le résultat suivant :

Lemme 1.1 Pour tout f càdlàg, pour tout $\epsilon > 0$, l'intervalle $[0, 1]$ est décomposable.

On pose

$$D = \{a \text{ tels que } [0, a] \text{ décomposable}\}.$$

20.1) Montrer qu'il existe $a > 0$ dans D .

20.2) Montrer que si $[0, a]$ est décomposable alors $[0, b]$ est décomposable pour tout $b \leq a$.

On note

$$A = \sup\{a, a \in D\}.$$

On doit montrer que $A = 1$. On suppose donc $A < 1$ et l'on souhaite aboutir à une contradiction.

20.3) Montrer que $[0, A]$ est décomposable.

20.4) Écrire ce que signifie que $[0, r]$ ne soit pas décomposable pour tout $r > A$.

20.5) Établir la contradiction.

On pose

$$S_n = \{t, |f(t) - f(t-)| \geq \frac{1}{n}\}.$$

20.6) Montrer que S_n est fini.

20.7) Que peut-on dire du cardinal des sauts de f ?

20.8) Montrer que f est bornée.

20.9) Montrer que f s'écrit de manière unique sous la forme

$$f(t) = f^c(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{1}_{[s_i, 1]}(t)$$

où les s_n sont des éléments distincts de $[0, 1]$.



Espaces vectoriels normés

Exercice 21 Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt,$$

dont on admettra qu'il s'agit d'une norme sur E . Soit ϕ l'endomorphisme de E défini par

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- 21.1) Démontrer que ϕ est continue.
- 21.2) Pour $n \geq 0$, on considère f_n l'élément de E défini par $f_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in [0, 1]$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\phi(f_n)\|_1$.
- 21.3) On pose $\|\phi\| = \sup_{f \neq 0_E} \frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1}$. Déterminer $\|\phi\|$.

■

Exercice 22 Soit $E = \mathbf{R}[X]$, muni de la norme $\|\sum_i a_i X^i\| = \sum_i |a_i|$.

- 22.1) Est-ce que l'application linéaire $\phi : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$, $P(X) \mapsto P(X+1)$ est continue sur E ?
- 22.2) Est-ce que l'application linéaire $\psi : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$, $P \mapsto AP$, où A est un élément fixé de E , est continue sur E ?

■

Exercice 23 Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \frac{n}{1+n(1+x)}$.

- 23.1) Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.
- 23.2) Démontrer que la convergence est en réalité uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 24 Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

24.1) $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$ sur \mathbf{R}^+ puis sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

24.2) $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ sur \mathbf{R} , puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 25 On considère \mathbf{R}^n muni du produit scalaire usuel et U une matrice symétrique (identifiée à l'endomorphisme correspondant) de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On pose

$$\phi(x) = \langle Ux, x \rangle$$

On note S la sphère unité de \mathbf{R}^n .

25.1) Montrer que ϕ atteint son maximum sur S . On note x_0 l'un de ces points.

Pour y orthogonal à x_0 , pour $t \in [0, 2\pi]$, on pose

$$x(t) = x_0 \cos(t) + y \sin(t)$$

et

$$f(t) = \phi(x(t)).$$

25.1) Montrer f est maximale en 0.

25.2) En déduire que y est orthogonal à Ux_0 .

25.3) En déduire que x_0 est un vecteur propre.

On rappelle que pour un sous espace vectoriel de \mathbf{R}^n , $(A^\perp)^\perp = A$.

25.4) Montrer que $(\mathbf{R} x_0)^\perp$ est stable par U .

25.5) En déduire que U est diagonalisable dans une base orthogonale.

On note ordonne les valeurs propres de U de la plus grande à la plus petite :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

25.6) Montrer que

$$\lambda_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle Ux, x \rangle}{\|x\|^2}.$$

25.7) Trouver une formule analogue pour λ_2 .

Exercice 26 On munit \mathbf{R}^n de la norme euclidienne et $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme induite

$$\|M\|_2 = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\|.$$

On note $\rho(M)$ le rayon spectral de M , c'est-à-dire le plus grand module de ses valeurs propres complexes.

26.1) Montrer que

$$\|M\|_2^2 = \rho(M^t M).$$

■

Exercice 27 — Théorème de Dini. Soit $(f_n, n \geq 1)$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}(K; \mathbf{R})$ où K est un compact de E , espace vectoriel normé. On suppose que f_n est croissante et converge ponctuellement sur K vers $f \in \mathcal{C}(K; \mathbf{R})$.

On fixe $\epsilon > 0$ et on pose

$$g_n = f - f_n \\ G_n = \{x, g_n(x) \leq \epsilon\}.$$

27.1) Montrer que les G_n sont des ouverts croissants et que

$$K \subset \bigcup_{n \geq 1} G_n.$$

27.2) En déduire que f_n converge uniformément vers f sur K .

■

Exercice 28 Pour $x \in [0, 1]$, on considère la suite de fonctions

$$p_0(x) = 0, \quad p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n(x)^2).$$

On veut montrer que p_n converge uniformément vers la fonction $(x \mapsto \sqrt{x})$ sur $[0, 1]$ en utilisant le théorème de Dini, voir exercice 27.

Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose

$$f_x(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2).$$

28.1) Quel est le degré du polynôme p_n ?

28.2) Montrer que f_x est croissante sur $[0, \sqrt{x}]$ et que

$$t \leq f_x(t) \leq \sqrt{x}.$$

- 28.3) En déduire que pour x fixé, $p_n(x)$ est croissante et converge vers \sqrt{x} .
- 28.4) Conclure. ■

Exercice 29 On considère $E = \{f \in \mathcal{C}, f(0) = 0\}$.

- 29.1) Montrer que E est fermé dans \mathcal{C}

On considère la forme linéaire

$$\begin{aligned}\Delta : E &\longrightarrow \mathbf{R} \\ f &\longmapsto \int_0^1 f(t) \, dt\end{aligned}$$

- 29.2) Montrer que cette forme linéaire est continue sur E .

- 29.3) Montrer que

$$\|\Delta\|_{E'} \leq 1$$

- 29.4) Construire une suite d'éléments de E de norme 1 tels que

$$|\Delta(f_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

- 29.5) Existe-il une fonction de E telle que

$$|\Delta(f_n)| = 1 ?$$
■

3

Séparation et optimisation

Exercice 30 Résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \max_x (x_1 - x_2) \\ & \text{sujet à } 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & \quad x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

■

Exercice 31 — Centre de Chebyshev. Pour $\lambda > 0$, on considère le trapèze T de sommets $(0,0)$, $(0,1)$, $(\lambda,0)$, $(\lambda,\lambda+1)$

31.1) Décrire T comme l'intersection des demi-espaces qui le contiennent. On identifiera les $a_i \in \mathbf{R}^2$ et $b_i \in \mathbf{R}$ tels que

$$T = \bigcap_{i=1}^? \{y \in \mathbf{R}^2, \langle a_i, y \rangle \leq b_i\}.$$

On cherche la boule la plus grande que l'on peut mettre dans T . Une boule est décrite par $x = (x_1, x_2)$ les coordonnées de son centre et r son rayon. On doit donc calculer

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in T, r \geq 0} r \\ & \text{sujet à } B(x, r) \subset T. \end{aligned}$$

31.2) Montrer que ce problème admet au moins une solution, c'est-à-dire qu'il existe un point de T et un rayon r_m qui réalisent le supremum.

31.3) Montrer que

$$\langle a_i, x \rangle + r \|a_i\| \leq b_i, \forall i = 1, \dots, 4 \iff B(x, r) \subset T. \quad (3.1)$$

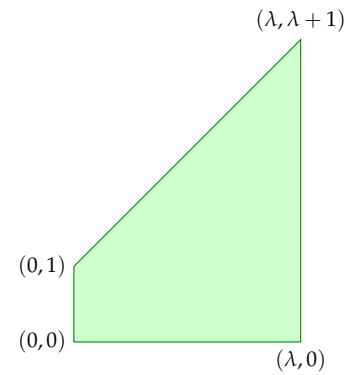


FIGURE 3.1: Le trapèze

Le problème initial est donc équivalent au programme linéaire

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in T, r \geq 0} r \\ & \text{sujet à } \langle a_i, x \rangle + r \|a_i\| \leq b_i, \forall i = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (3.2)$$

31.4) Identifier les points extrémaux de ce polyèdre et résoudre (3.2).

■

Exercice 32 — Points extrémaux. On s'intéresse aux points extrémaux en dimension infinie.

- 32.1) En reprenant au besoin la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donner la condition sous laquelle il y a égalité dans cette inégalité.
- 32.2) Soit H un espace muni d'un produit scalaire. Montrer que tous les points du bord de $B(0, 1)$ sont extrémaux.
- 32.3) Dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$, montrer que les fonctions $\mathbf{1}$ et $-\mathbf{1}$, i.e. les fonctions constantes égales à 1 ou -1 sont des points extrémaux de $B(0, 1)$.
- 32.4) Montrer que ce sont les seuls.

■

Exercice 33 — Ensemble des points extrémaux. Pour K convexe de E , on note $\text{ext}(K)$ l'ensemble de ces points extrémaux. On suppose que K est un convexe compact de E , espace vectoriel normé. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$F_n = \left\{ x \in K, \exists y, z \in K \text{ avec } x = \frac{y+z}{2} \text{ et } \|x-y\|_E \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

- 33.1) Montrer que F_n est fermé.
- 33.2) Montrer que

$$\text{ext}(K)^c = \bigcup_{n \geq 1} F_n.$$

On en déduit que $\text{ext}(K)$ est un G_δ , c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts.

■

Exercice 34 — Théorème de Radon. Soit $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ des points distincts de \mathbf{R}^n avec $m \geq n + 2$.

34.1) Montrer qu'il existe $(\lambda_i, 1 \leq i \leq m)$ tels que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 0. \quad (3.3)$$

On considère les deux ensembles

$$L^+ = \{i, \lambda_i \geq 0\} \text{ et } L^- = \{i, \lambda_i < 0\}.$$

On pose

$$x = \sum_{i \in L^+} \frac{\lambda_i}{\sum_{j \in L^+} \lambda_j} x_i.$$

34.2) Montrer que

$$x = \sum_{i \in L^-} \frac{\lambda_i}{\sum_{j \in L^-} \lambda_j} x_i.$$

34.3) En déduire que l'on a trouvé une partition de $\{1, \dots, m\}$ en deux sous-ensembles disjoints S et T tels que

$$\text{conv}(x_i, i \in S) \cap \text{conv}(x_i, i \in T) \neq \emptyset.$$

■

Exercice 35 — Théorème de Helly. On veut montrer le résultat suivant :

Théorème 3.1 Soit S_1, \dots, S_m m ensembles convexes de \mathbf{R}^n avec $m \geq n + 2$ tels que l'intersection de n'importe lesquels k d'entre eux, avec $k \leq n + 1$, soit non vide alors l'intersection de tous est non vide.

Par exemple, dans \mathbf{R}^2 , si quatre boules s'intersectent 3 à 3 alors elles ont une intersection commune non vide. En revanche, on peut trouver 3 boules qui s'intersectent 2 à 2 sans avoir d'intersection commune.

On suppose dans un premier temps que $m = n + 2$. On pose

$$B_j = \bigcap_{i \neq j} S_i$$

dont on sait qu'ils sont tous non vides. Soit $x_j \in B_j$.

35.1) En appliquant le théorème de Radon, montrer que l'intersection des S_j est non vide.

35.2) Finir la preuve par récurrence sur m .

35.3) Trouver une situation où l'on a 3 boules qui s'intersectent 2 à 2 dans le plan sans qu'elles aient d'intersection commune.

■

Exercice 36 — Inégalité de Hölder. Soit $p > 1$ et q tel que $1/p + 1/q = 1$.

36.1) En utilisant les fonctions convexes conjuguées, montrer que pour x, y deux réels positifs, on a

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

On se donne (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) deux vecteurs non nuls de $(\mathbf{R}^+)^n$. On pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p}.$$

36.2) Montrer que

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

■

Exercice 37 À quelle condition sur la matrice Q symétrique réelle de taille $n \times n$, la fonction

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \langle Qx, x \rangle \end{aligned}$$

est-elle convexe ?

■

Exercice 38 Soit $h : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ convexe et g_1, \dots, g_k des fonctions convexes définies sur \mathbf{R}^n . À quelle condition suffisante supplémentaire sur h , la fonction

$$x \in \mathbf{R}^n \longmapsto h(g_1(x), \dots, g_k(x))$$

est convexe ?

■

Exercice 39 Soit (E, N_E) un espace vectoriel normé.

39.1) Montrer que la fonction N_E est convexe.

39.2) Soit $x' \in E'$, montrer que s'il existe $x \in B(0, 1)$, $x \neq 0$, tel que

$$\langle x', x \rangle_{E', E} - N_E(x) > 0 \quad (3.4)$$

alors $N_E^*(x') = +\infty$.

39.3) Si $N_E^*(x') > 1$, construire x vérifiant (3.4).

39.4) En déduire que N_E^* est définie par

$$N_E(x') = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x'\|_{E'} \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$



4

Espaces de Hilbert

Exercice 40 On se place dans $L^2([0, 1])$.

40.1) En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, trouver une base orthonormale du sous-espace vectoriel $\text{vect}\{1, t, t^2\}$.

40.2) En déduire

$$\inf_{a,b,c} \int_0^1 |t^3 - a - bt - ct^2|^2 dt.$$

Exercice 41 — Polynômes de Legendre. Les polynômes de Legendre sont définis par

$$P_n(x) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n.$$

41.1) Montrer que $(P_n, n \geq 0)$ est une famille orthonormale dans $L^2([-1, 1], dx)$.

41.2) Montrer que l'on peut l'obtenir par le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la famille $(x^n, n \geq 0)$.

Exercice 42 Soit f la fonction 2π -périodique telle que $f(x) = e^x$ si $x \in [-\pi, \pi[$.

42.1) Déterminer la série de Fourier de f .

42.2) En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1} \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

Exercice 43 On a montré dans le cours le théorème suivant

Théorème 4.1 Soit $f \in L^2([0, 2\pi])$, l'application

$$\begin{aligned} I^1 : L^2([0, 2\pi]) &\longrightarrow \mathcal{C}([0, 2\pi]; \mathbb{C}) \\ f &\longmapsto I^1 f \end{aligned}$$

est continue. Si f est à moyenne nulle, c'est-à-dire

$$c_0(f) = 0 \text{ ou de manière équivalente } \int_0^{2\pi} f(t) \, dt = 0$$

alors le développement en série de Fourier de $I^1 f$ est donné par l'intégration terme à terme de celui de f :

$$(I^1 f)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{in} c_n(f) e_n(t).$$

On veut maintenant voir ce qui se passe si f n'est plus de moyenne nulle.

43.1) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $t \mapsto t$.

On pose $g = I^1 f$ et

$$h(t) = g(t) - t \int_0^{2\pi} f(u) \, du = g(t) - tg(1).$$

43.2) En utilisant le théorème ci-dessus, calculer le développement en série de Fourier de g .

Exercice 44 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et 2π -périodique. Montrer que f est de classe C^∞ si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $c_n(f) = o(1/n^k)$ quand $|n|$ tend vers $+\infty$.

Indication : dans un sens écrire le lien entre les coefficients de Fourier de f et ceux de ses dérivées. Réciproquement montrer que f est somme de sa série de Fourier et que cette série définit une fonction C^∞ . On admettra que les théorèmes de continuité et dérivabilité sous le signe somme sont valables pour les séries indexées par \mathbb{Z} .

Exercice 45 Pour $s \in \mathbb{R}$, on considère

$$\ell^{2,s}(\mathbb{Z}) = \{u = (u_k, k \in \mathbb{Z}), \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^s |u_k|^2 < \infty\}.$$

On munit cet espace du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k \in \mathbf{Z}} (1 + k^2)^s u_k \overline{v_k}.$$

- 45.1) En exhibant une bijection continue entre cet espace et $\ell^2(\mathbf{Z})$, montrer que $\ell^{2,s}(\mathbf{Z})$ est un espace de Hilbert.
- 45.2) Montrer que si $s > 1/2$, les éléments de $\ell^2(\mathbf{Z})$ définissent des séries absolument convergentes.
- 45.3) Soit $u \in \ell^{2,-s}(\mathbf{Z})$. Montrer que u appartient au dual de $\ell^{2,s}(\mathbf{Z})$.

On considère

$$H^s = \{u \in L^2([-\pi, \pi]), (\hat{u}_k, k \in \mathbf{Z}) \in \ell^{2,s}(\mathbf{Z})\}.$$

Soit $S_n(u)$ la somme partielle du développement en série de Fourier :

$$S_n(u)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-n}^n \hat{u}_k e^{ikt}.$$

- 45.4) Montrer que

$$\|S_n(u) - S_{n+p}(u)\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |\hat{u}_k|.$$

- 45.5) Dédurre de la question 45.2) que pour $s > 1/2$, la suite $(S_n(u), n \geq 1)$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}([-\pi, \pi]; \mathbf{C})$.
- 45.6) Que peut-on en déduire sur la régularité des éléments de H^s ?

■

Exercice 46 — Inégalité d'interpolation. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction 2π -périodique de classe C^1 et telle que

$$\int_0^{2\pi} f(t) \, dt = 0.$$

- 46.1) Rappeler le lien entre les coefficients de Fourier $c_n(f)$ et $c_n(f')$.
- 46.2) En déduire que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$|f(t)| \leq \sum_{n \in \mathbf{Z}^*} \frac{1}{|n|} |c_n(f')|.$$

- 46.3) En utilisant Cauchy-Schwarz et Parseval, en déduire l'inégalité suivante :

$$\|f\|_{\infty}^2 \leq \frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} (f'(t))^2 dt$$

(on rappelle que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

Exercice 47 Soit $H = \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$. On note $C = \{x = (x_n) \in H; \forall n \in \mathbf{N}, x_n \geq 0\}$.

- 47.1) Démontrer que C est convexe fermé.
- 47.2) Déterminer la projection sur ce convexe C .
- 47.3) Reprendre la question précédente avec $H = \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{C})$.

Exercice 48 Soit H un espace de Hilbert réel. Déterminer une expression de la projection sur la boule unité fermée de H .

Exercice 49 Le but de l'exercice est de déterminer si l'équation différentielle (E)

$$y'' + e^{it}y = 0$$

admet des solutions 2π -périodiques.

- 49.1) Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n!)^2} e^{int}$ converge uniformément sur \mathbf{R} vers une fonction f 2π -périodique.
- 49.2) Montrer que la fonction f est de classe C^2 et qu'elle est solution de (E).
- 49.2) Soit $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une solution 2π -périodique de classe C^2 de (E). On désigne par $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(g) e^{int}$ et $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(g'') e^{int}$ les séries de Fourier respectives de g et de g'' .
- 49.1) Exprimer $c_n(g'')$ en fonction de $c_n(g)$.
- 49.2) En utilisant que g est solution de (E), exprimer $c_n(g'')$ en fonction de $c_{n-1}(g)$.
- 49.3) En déduire que l'ensemble des solutions 2π -périodiques de (E) est l'espace vectoriel de dimension 1 engendré par la fonction f .

49.3) (E) possède-t-elle des solutions qui ne sont pas 2π -périodiques?

■

Exercice 50 Soit $H = L^2([0, 1])$. Pour $f \in H$, on pose

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

50.1) Montrer que T est un opérateur continu sur H .

50.2) Calculer l'adjoint de T .

■

Exercice 51 Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite bornée de nombres complexes et T l'application linéaire de $\ell^2 = \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{C})$ dans lui-même définie par $T(x) = (\alpha_n x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, pour $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2$.

51.1) Vérifier que T est continue, et calculer son adjoint.

Soit S l'application de $\ell^2 = \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{C})$ dans lui-même définie par $S(x) = (0, x_0, x_1, \dots)$.

51.2) Vérifier que S est continue et calculer son adjoint.

Soit $H = L^2([0, 1], \mathbf{C})$ muni du produit scalaire usuel, et $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue. Pour $x \in [0, 1]$, on pose

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy.$$

51.3) Vérifier que T est une application linéaire continue, et calculer son adjoint.

■

Exercice 52 On considère le noyau défini sur $[0, 1] \times [0, 1]$

$$K(t, s) = \min(t, s) - ts.$$

On veut montrer que le RKHS associé à ce noyau est l'ensemble des fonctions de $W^{1,2}$ nulles en 1, noté ici $W_0^{1,2}$.

52.1) Trouver $L(t, s)$ telle que

$$K(t, s) = \int_0^1 L(t, r)L(s, r) dr.$$

52.2) Montrer que $\text{vect}(K(t, \cdot), t \in [0, 1])$ est bien inclus dans $W_0^{1,2}$.

52.3) Montrer que l'espace

$$L_0^2 = \{f \in L^2, \int_0^1 f(t) \, dt = 0\}$$

est un sous-espace fermé de L^2 .

52.4) Montrer que

$$\text{vect}(L(t, \cdot), t \in [0, 1])$$

est dense dans L_0^2 .

52.5) Montrer que l'application

$$L : L_0^2 \longrightarrow W_0^{1,2}$$

$$\dot{f} \longmapsto (t \mapsto \int_0^t \dot{f}(s) \, ds - t \int_0^1 \dot{f}(s) \, ds)$$

est injective et surjective.

On munit $W_0^{1,2}$ du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 L^{-1}(f)(s) L^{-1}g(s) \, ds.$$

52.6) En déduire que

$$\text{vect}(K(t, \cdot), t \in [0, 1])$$

est dense dans $W_0^{1,2}$.

■

Exercice 53 On veut construire un classificateur binaire à partir des données

- Taille 1 cm, catégorie 1
- Taille 2 cm, catégorie 2
- Taille 4 cm, catégorie 1

Tant que l'on reste en dimension 1, cela paraît impossible. On considère H le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}([0, 5], \mathbf{R})$ engendré par les fonctions

$$f : x \longmapsto \min(1, x)$$

$$g : x \longmapsto \min(2, x)$$

$$h : x \longmapsto \min(4, x).$$

On note

$$\min(a, b) = a \wedge b \text{ et } f = 1 \wedge .$$

On munit H du produit scalaire

$$\langle a \wedge ., b \wedge . \rangle = a \wedge b$$

53.1) Quelle est l'expression générale d'un élément de H ?

53.2) Caractériser $\{f\}^\perp$, $\{g\}^\perp$ et $\{h\}^\perp$.

53.3) Orthonormaliser la famille (f, g, h) dans H .

53.4) En déduire $p_H(3 \wedge .)$.

53.5) De quel produit scalaire faut-il munir \mathbf{R}^3 pour que l'application

$$\begin{aligned} \theta : H &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ \sum_{i=1,2,4} \alpha_i (i \wedge .) &\longmapsto (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) \end{aligned}$$

soit une isométrie?

53.6) Montrer que l'on peut écrire ce produit scalaire sous forme

$$\left\langle M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

où \langle , \rangle est le produit scalaire ordinaire sur \mathbf{R}^3 et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

On pose

$$A = M \circ \theta(f), B = M \circ \theta(g), C = M \circ \theta(h).$$

53.7) Calculer les coordonnées de A , B et C et montrer qu'il existe une infinité de plans qui séparent A et C d'un côté et B de l'autre.

53.8) Quelle est l'intersection de ces plans avec le plan $x = 1$.

■

Correction des exercices

Exercice 1 ▷ Un polynôme de degré n est défini par autant de coefficients qu'il y a de couples d'entiers

$$(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}, i + j \leq n.$$

Soit R_n ce nombre (on peut le calculer mais ce n'est pas nécessaire pour l'argument). Par conséquent l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n est en bijection avec \mathbf{Q}^{R_n} , qui est lui-même dénombrable donc en bijection avec \mathbf{N} . Maintenant

$$\mathbf{Q}[X_1, X_2] = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{Q}_n[X_1, X_2]$$

qui est bijection avec $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, qui est dénombrable.

Exercice 2 ▷ On vérifie facilement que d est symétrique et que $d(x, y) = 0 \iff x = y$. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^+ &\longrightarrow \mathbf{R}^+ \\ x &\longmapsto \frac{x}{1+x}. \end{aligned}$$

Montrons que

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y). \quad (4.1)$$

Comme on a

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \frac{x+y}{x+y+1} \\ &= \frac{x}{x+y+1} + \frac{y}{x+y+1} \\ &\leq \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} \end{aligned}$$

puisque y et x sont positifs.

Comme

$$d(u, v) = f(|u - v|),$$

l'inégalité triangulaire revient à montrer que

$$f(|u - v|) \leq f(|u - w|) + f(|w - v|).$$

Or d'après l'inégalité triangulaire classique,

$$|u - v| \leq |u - w| + |w - v|$$

et l'on conclut avec (4.1).

Exercice 3 ▷

53.1) On vérifie les trois propriétés sans souci.

53.2) Par définition,

$$\begin{aligned} B(1, 1) &= \{y \in E, \left|1 - \frac{1}{y}\right| < 1\} \\ &= \{y \in E, -1 < 1 - \frac{1}{y} < 1\} \\ &= \{y \in E, 0 < \frac{1}{y} < 2\} \\ &=]\frac{1}{2}, +\infty[\end{aligned}$$

53.3) Soit $x \in]0, 1[$, on a

$$d(x, 1) = \frac{1}{x} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty.$$

Par conséquent, A n'est contenue dans aucune boule de rayon fini donc A n'est pas bornée.

Soit $(x_n, n \geq 1)$ une suite d'éléments de A qui converge vers x , en particulier $d(x_n, x)$ est bien définie donc $x \neq 0$. Par définition, cela revient à dire que $1/x_n$ vers $1/x$ pour la notion usuelle de convergence. Par continuité de la fonction inverse, la suite x_n tend vers x et comme $x_n \in]0, 1[$, on a $x \in]0, 1[$. On a exclu $x = 0$ donc la limite est bien dans $]0, 1[= A$.

53.4) On écrit la définition d'une boule et on manipule les inégalités en prenant soin de distinguer les cas $r > 1/x_0$ et $r < 1/x_0$. On trouve

$$B(x_0, r) = \begin{cases} \left[\frac{x_0}{1+r x_0}, +\infty\right[& \text{si } r \geq \frac{1}{x_0}, \\ \left[\frac{x_0}{1+r x_0}, \frac{x_0}{1-r x_0}\right[& \text{si } r < \frac{1}{x_0}. \end{cases}$$

Exercice 18 ▷

- 18.1). Soit x_n une suite qui tend vers x , quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \liminf_n f(x_n) := \beta.$$

Si $f(x) > \beta$ alors pour tout n suffisamment grand,

$$x_n \in L_\gamma \text{ où } \gamma = \frac{1}{2}(f(x) + \beta) \in]\beta, f(x)[.$$

Par hypothèse, $x = \lim x_n$ appartient aussi à L_γ d'où une contradiction.

Réciproquement, supposons que (1.3) soit vérifiée et soit $(x_n, n \geq 1)$ une suite de points de L_α qui converge vers x . On a

$$f(x) \leq \liminf_n f(x_n) \leq \liminf_n \alpha \leq \alpha.$$

Par conséquent, x appartient à L_α qui est donc un ensemble fermé.

- 18.2). Il faut exclure a et inclure b , pour obtenir $\mathbf{1}_{]a,b]}$.
 18.3). Si f n'est pas inférieurement bornée sur K compact, il existe $(x_n, n \geq 1)$ telle que

$$f(x_n) \leq -n.$$

Comme K est compact, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point x de K . Comme f est s.c.i.

$$f(x) \leq \liminf_k f(x_{n_k}) = -\infty.$$

On a implicitement interdit la valeur $-\infty$ comme valeur possible de f donc il y a une contradiction donc

$$\inf_{x \in K} f(x) \in \mathbf{R}.$$

- 18.4). Soit maintenant $(x_n, n \geq 1)$ une suite telle que

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf_{x \in K} f(x).$$

On extrait une suite $(x_{n_k}, k \geq 1)$ qui converge vers x dans K . On a d'une part

$$f(x) \leq \liminf_k f(x_{n_k}) = \lim_k f(x_{n_k}) = \inf_{y \in K} f(y)$$

et d'autre part

$$f(x) \geq \inf_{y \in K} f(y),$$

donc

$$f(x) = \inf_{y \in K} f(y).$$

Exercice 19 ▷

- 19.1) Au premier rang, la propriété est clairement vérifiée. Supposons qu'elle soit vraie au rang n . Remarquons que

$$|c|^{2n} \geq |c|$$

puisque $|c| > 2 > 1$. Ensuite, par l'inégalité triangulaire

$$|z_{n+1}| \geq \left| |z_n|^2 - |c| \right|$$

D'après l'hypothèse de récurrence

$$|z_n|^2 \geq c^{2n},$$

et d'après la remarque précédente,

$$\left| |z_n|^2 - |c| \right| \geq \left| |c|^{2n} - |c| \right|.$$

Il reste à vérifier que

$$|c|^{2n} - |c| \geq |c|^{n+1}$$

pour $|c| > 2$. Or

$$\begin{aligned} \frac{|c|^{2n} - |c|}{|c|^{n+1}} &= |c|^{n-1} - \frac{1}{|c|^n} \\ &\geq |c|^{n-1} - 1 \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

où l'on utilisé deux fois le fait que $|c| > 2$.

- 19.2) D'après la question précédente

$$B(0,2)^c \subset \mathcal{M}^2 \text{ donc } \mathcal{M} \subset B(0,2).$$

- 19.3) Si c appartient à l'intersection de tous les ensembles alors par définition, $\limsup_n |z_n(c)|$ est finie donc $c \in \mathcal{M}$.

Réciproquement, si $c \in \mathcal{M}$ alors d'après ce qui précède, $|z_n(c)| \leq 2$ pour tout $n \geq 1$.

- 19.4) C'est clairement une fonction polynomiale de c donc elle est continue.

- 19.5) Par conséquent, chacun des ensembles de l'intersection dans (1.2) est l'image réciproque du fermé $[-2, 2]$ par une application continue donc est fermé.

L'ensemble de Mandelbrot est donc l'intersection dénombrable de fermés donc il est fermé. On sait déjà qu'il est borné donc il est compact.

Exercice 20 ▷

- 20.1) Comme f est continue en 0 à droite, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t| \leq \delta \implies |f_{0t}| \leq \epsilon/2.$$

Par inégalité triangulaire,

$$t, s \leq \delta \implies |f_{st}| \leq \epsilon.$$

Ce qui signifie que $\delta \in A$.

- 20.2) Prenons la suite des t_i donnée par la décomposabilité de $[0, a]$.
Soit $t_b \leq b < t_{b+1}$, on a

$$w_f([t_b, b]) \leq w_f([t_b, t_{b+1}]) < \epsilon$$

donc $t_0, \dots, t_b, b, t_{b+1}, \dots$ est une suite qui décompose $[0, b]$.

- 20.3) Par continuité à gauche en A , il existe δ tel que

$$\sup_{s, t \in [A-\delta, \delta]} |f_{st}| \leq \epsilon.$$

Il suffit de combiner avec la décomposabilité de l'intervalle $[0, A - \delta]$.

- 20.4) Pour tout $v > 0$, pour tout t_0, \dots, t_v satisfaisant (1.3) avec $a = r$, il existe $i \in \{0, v-1\}$ tel que

$$w_f([t_i, t_{i+1}]) < \epsilon.$$

- 20.5) Comme on sait que $[0, A]$ est décomposable, pour $r = 1 + 1/n$,

$$w_f([A, A + 1/n]) > \epsilon.$$

Il existe s_n et r_n tels que

$$|s_n - A| \leq 1/n, |r_n - A| \leq 1/n \text{ et } |f(s_n) - f(r_n)| \geq \epsilon.$$

Or f est continue à droite en A donc

$$|f(s_n) - f(r_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'où la contradiction.

- 20.6) D'après la décomposabilité de f pour $\epsilon = 1/2n$, les sauts ne peuvent avoir lieu sur les intervalles $[t_i, t_{i+1}[$. En comptant plusieurs fois les mêmes sauts, il y en a au plus autant que de paires (i, j) avec $i < j$, soit au plus $v(v-1)/2$.
- 20.7) Comme S l'ensemble des instants de sauts de f est la réunion des S_n , il y a au plus un nombre dénombrable de sauts.

- 20.8) Il y a un nombre fini de sauts de hauteur plus grande que 1 (ou n'importe quel autre seuil). On prend comme instants t_i ceux donnés par la décomposabilité de f pour $\epsilon = 1$. Sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ par continuité et limite à gauche, f est bornée. Par conséquent f est bornée sur $[0, 1]$.
- 20.9) On note $(s_n, n \geq 1)$ l'ensemble des instants de sauts de f avec la convention que $s_n = 1$ pour n supérieur au nombre de sauts si celui-ci est fini. On pose

$$\alpha_n = \begin{cases} f(s_n) - f(s_n-) & \text{si } s_n < 1 \\ 0 & \text{si } s_n = 1 \end{cases}$$

On pose

$$f^d(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{1}_{[s_i, 1]}(t).$$

Par construction, en tout point de $[0, 1]$,

$$\lim_{s \uparrow t} (f - f^d)(s) = \lim_{s \downarrow} (f - f^d)(s)$$

donc

$$f^c = f - f^d$$

est continue et la décomposition est établie.

Si on a deux décompositions,

$$f = f_1^c + f_1^d \text{ et } f = f_2^c + f_2^d,$$

les instants de sauts et les hauteurs de sauts de $f - f_1^c$ et $f - f_2^c$ sont les mêmes que ceux de f donc $f_1^d = f_2^d$ et l'unicité s'ensuit.

Exercice 27 ▷

- 27.1) Comme f et f_n sont continues, G_n est l'image réciproque de l'ouvert $] -\infty, \epsilon]$ par g_n qui est continue donc G_n est ouvert. Comme $f_n \leq f_{n+1}$, on a $g_{n+1} \leq g_n$ donc $G_n \subset G_{n+1}$. Pour tout $x \in K$, il existe un rang n_x à partir duquel

$$g(x) - g_n(x) \leq \epsilon,$$

donc

$$x \in \bigcup_{n=n_x}^{\infty} G_n \subset \bigcup_{n \geq 1} G_n.$$

- 27.2) Comme K est compact, on peut extraire un sous recouvrement fini de K par les G_n . Il existe j_1, \dots, j_r tels que

$$K \subset G_{j_1} \cup \dots \cup G_{j_r}.$$

Or les G_n sont croissants donc

$$K \subset G_{j_r}.$$

Autrement dit, pour le $\epsilon > 0$ fixé au départ, il existe un indice, ici j_r , tel que $n \geq j_r$ implique

$$|g(x) - g_n(x)| = g(x) - g_n(x) \leq \epsilon, \forall x \in K.$$

Ce qui est très exactement la condition pour que la convergence soit uniforme.

Exercice 28 ▷

28.1) p_1 est de degré 1, ensuite le degré double à chaque étape donc le degré de p_n est 2^n .

28.2) On dérive et on voit trivialement que f_x est croissante et vaut \sqrt{x} en $t = \sqrt{x}$ d'où l'inégalité demandée.

28.3) Comme

$$p_{n+1}(x) = f_x(p_n(x)) \geq p_n(x)$$

donc $p_n(x)$ est une suite croissante.

28.4) En appliquant le théorème de Dini, on en déduit que la convergence est uniforme. On a donc construit une autre suite de polynômes (différente de celle du théorème de Bernstein) qui converge dans $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R})$ vers \sqrt{x} . Au début tout va bien comme le montre la figure 4.1.

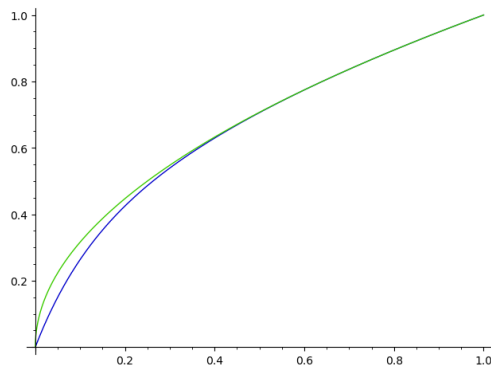


FIGURE 4.1: En bleu le graphe de p_7 , en vert celui de \sqrt{x}

En revanche quand le degré augmente, les choses dégénèrent numériquement comme le montre la figure 4.2

Exercice 30 ▷ La fonction $(x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_2$ est linéaire donc convexe donc son maximum est atteint en les points extrémaux du polyèdre défini par les contraintes.

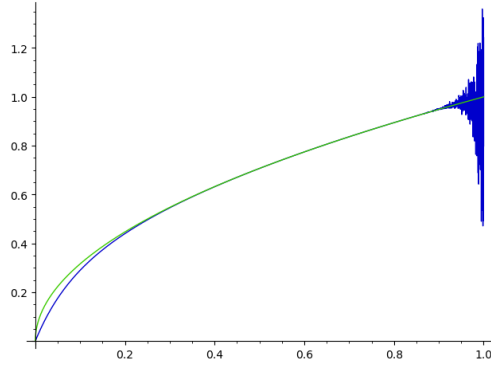
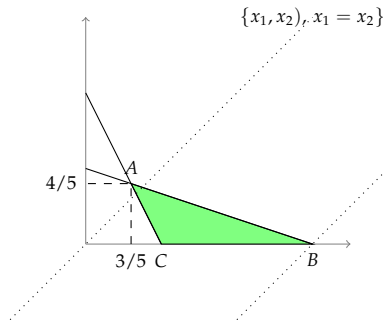
FIGURE 4.2: En bleu le graphe de p_9 , en vert celui de \sqrt{x} 

FIGURE 4.3: En vert, le polyèdre défini par les contraintes

On obtient

En A : $-1/5$

En B : 3

En C : 1.

Ce qui paraît cohérent parce que le point B est le plus loin de la droite $\{(x_1, x_2), x_1 = x_2\}$.

Exercice 31 ▷

31.1) L'équation de la droite oblique est $x_2 = x_1 + 1$ donc on a

$$\begin{aligned} T = & \{x, \langle (-1, 0), x \rangle \leq 0\} \\ & \cap \{x, \langle (0, 1), x \rangle \leq 0\} \\ & \cap \{x, \langle (1, 0), x \rangle \leq 1\} \\ & \cap \{x, \langle (-1, 1), x \rangle \leq 1\} \end{aligned}$$

31.2) T est inclus dans la boule $B(0, \sqrt{2\lambda^2 + 1})$, r^2 est nécessairement inférieur à $2\lambda^2 + 1$. L'application

$$\begin{aligned} T \times [0, \sqrt{2\lambda^2 + 1}] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, r) & \longmapsto r \end{aligned}$$

est continue sur un compact donc elle atteint ses bornes : il existe (x, r) qui réalise le maximum.

31.3) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que

$$\langle a, x \rangle \leq \|a\| \|x\|$$

avec égalité lorsqu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $x = \alpha a$. On décrit la boule $B(x, r)$ comme

$$B(x, r) = \{x + u, \|u\| \leq r\}.$$

Par conséquent, pour tout $y = x + u \in B(x, r)$,

$$\langle a, y \rangle = \langle a, x \rangle + \langle a, u \rangle \leq \langle a, x \rangle + \|a\| \|u\|.$$

Il s'ensuit que si (3.1) est satisfaite alors $B(x, r) \subset T$.

À ce stade, on a une condition seulement suffisante parce que l'on a utilisé une inégalité (i.e. celle de Cauchy-Schwarz) ce qui ne nous donne pas l'équivalence. On va tirer profit du fait que l'on connaît les cas d'égalité.

Réciproquement, si $B(x, r) \subset T$, pour $u_i = r a_i / \|a_i\|$, on a $x + u \in T$ donc

$$\langle a_i, x \rangle + \langle a_i, r \frac{a_i}{\|a_i\|} \rangle \leq b_i$$

soit

$$\langle a_i, x \rangle + r \|a_i\| \leq b_i.$$

31.4) Les équations du nouveau problème sont

$$-x_1 + r \leq 0 \quad (\text{P})$$

$$-x_2 + r \leq 0 \quad (\text{Q})$$

$$x_1 + r \leq \lambda \quad (\text{R})$$

$$-x_1 + x_2 + \sqrt{2} r \leq 1 \quad (\text{S})$$

D'après le cours, on sait que le maximum est atteint en les points extrémaux de ce polyèdre, c'est-à-dire ceux qui sont à l'intersection de 3 plans.

- $P \cap Q \cap R$ donne

$$x_1 = x_2 = r = \frac{\lambda}{2}$$

Si $\lambda > \sqrt{2}$, ce point ne satisfait pas (S).

- $P \cap Q \cap S$ donne

$$x_1 = x_2 = r = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ce point ne satisfait (R) que si

$$\lambda \geq \sqrt{2}.$$

- $P \cap R \cap S$ donne

$$x_1 = r = \frac{\lambda}{2} \text{ et } x_2 = 1 - \lambda \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

Ce point n'est dans le polyèdre que si $x_2 \geq r$ soit tous calculs faits $\lambda \leq \sqrt{2}$.

- $Q \cap R \cap S$ donne

$$r = x_2 = \lambda - x_1 = \frac{1+\lambda}{2+\sqrt{2}}.$$

Ce point n'est dans le polyèdre que si

$$r \leq \frac{\lambda}{2} \iff \lambda \geq \sqrt{2}.$$

En résumé, si $\lambda < \sqrt{2}$, les points extrémaux sont

$$\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{\lambda}{2}, 1 - \lambda \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \frac{\lambda}{2}\right).$$

Ces deux points ont la même ordonnée donc le rayon maximum vaut $\lambda/2$.

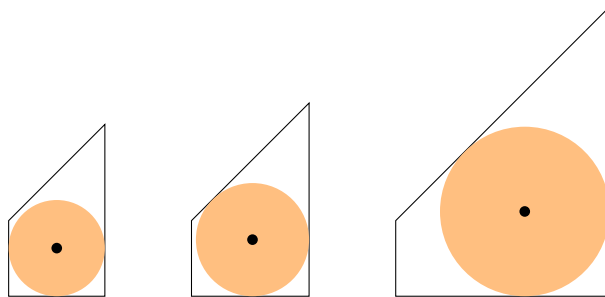
Si $\lambda \geq \sqrt{2}$, les points extrémaux sont

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ et } \left(\lambda - \frac{1+\lambda}{2+\sqrt{2}}, \frac{1+\lambda}{2+\sqrt{2}}, \frac{1+\lambda}{2+\sqrt{2}}\right)$$

Comme $\lambda \geq \sqrt{2}$, un calcul simple donne

$$\frac{1+\lambda}{2+\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donc le rayon maximum est $\frac{1+\lambda}{2+\sqrt{2}}$.



La position du cercle optimal pour $\lambda = 0,9\sqrt{2}$; $1,1\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$.
Tant que $\lambda < \sqrt{2}$, le cercle le plus grand est coincé dans le carré inférieur ensuite il peut monter dans la pointe.

32.1) Pour la preuve de CS, on part de

$$t \mapsto \|x + ty\|_H^2 \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}.$$

Comme on peut développer la norme en

$$\|y\|^2 t^2 + 2\langle x, y \rangle_H t + \|x\|_H^2$$

on voit que c'est un polynôme positif sur \mathbf{R} donc son discriminant est négatif, soit

$$4 \left(\langle x, y \rangle_H^2 - \|x\|_H^2 \|y\|_H^2 \right) \leq 0.$$

Si l'inégalité précédente est stricte, l'inégalité de CS est stricte. Si l'inégalité est une égalité alors le polynôme a exactement une racine réelle : il existe t_0 tel que

$$x + t_0 y = 0,$$

c'est-à-dire que y et x sont liés. Réciproquement, s'ils sont liés, CS est bien une égalité.

32.2) On remarque que pour $x \in B(0,1)$ et $\|x\|_H < 1$, pour tout $\epsilon \in]0, 1/\|x\|_H - 1$, on a

$$x = \frac{1}{2}(1 - \epsilon)x + (1 + \epsilon)x$$

et

$$\|(1 \pm \epsilon)x\|_H \leq 1$$

donc les points extrémaux ne peuvent se trouver que sur le bord de la boule.

Soit x extrémal de norme 1. S'il existe y, z tels que

$$x = \frac{y + z}{2}$$

alors

$$1 = \|x\|_H = \frac{1}{2}\|y + z\|_H \leq \frac{1}{2}(\|y\|_H + \|z\|_H) \leq 1.$$

Par conséquent,

$$\|y + z\|_H = \|y\|_H + \|z\|_H.$$

En élevant au carré, cette identité implique que

$$\langle y, z \rangle_H = \|y\|_H \|z\|_H \quad (4.2)$$

donc égalité dans l'inégalité de CS. Par conséquent, il existe λ tel que $z = \lambda y$ et compte tenu de (4.2), λ est nécessairement positif. On a donc

$$x = \frac{1 + \lambda}{2} y = \frac{1 + 1/\lambda}{2} z.$$

Comme les normes de y et z sont inférieures à 1, on a nécessairement

$$1 + \lambda \geq 2$$

$$1 + \frac{1}{\lambda} \geq 2$$

soit $\lambda = 1$ donc $x = y = z$.

32.3) Si y et z sont telles que

$$\frac{y(t) + z(t)}{2} = 1, \quad \forall t$$

et qu'il existe t_0 tel que $y(t_0) < 1$. Alors $z(t_0) > 1$ donc z n'appartient pas à la boule unité de \mathcal{C} , ce qui est absurde. Par conséquent, $y = 1$ et donc z aussi. On fait le même raisonnement avec -1 .

32.4) Il est évident qu'un point extrémal ne peut se trouver que sur le bord de la boule. Soit x extrémal de norme 1. Supposons qu'il existe t_0 tel que $|x(t_0)| < 1$. Pour tout $\delta > 0$, il existe un intervalle I_δ contenant t_0 tel que

$$|x(t)| \leq 1 - \delta, \quad \forall t \in I_\delta.$$

On considère la fonction Δ qui vaut δ en t_0 , nulle en dehors de I_δ et affine ailleurs (i.e. une fonction *triangle*). On a de manière évidente

$$x = \frac{1}{2}(x + \Delta) + \frac{1}{2}(x - \Delta)$$

et

$$\|x \pm \Delta\|_\infty \leq 1.$$

Par conséquent, x n'est pas extrémal.

Exercice 34 ▷

34.1) On plonge les x_i dans \mathbf{R}^{n+1} en considérant les vecteurs

$$\bar{x}_i = (x_i, 1).$$

Comme on a plus de vecteurs que la dimension de l'espace ambiant, ils sont forcément liés d'où l'existence des λ_i .

34.2) D'après les deux équations (3.3),

$$A := \sum_{j \in L^-} \lambda_j = - \sum_{j \in L^+} \lambda_j$$

et

$$\sum_{j \in L^-} \lambda_j x_j = - \sum_{j \in L^+} \lambda_j x_j$$

donc les deux expressions de x coïncident.

34.3) Comme

$$\sum_{i \in L^+} \lambda_i = A = - \sum_{i \in L^-} \lambda_i,$$

x est tout à la fois une combinaison convexe d'éléments de S et de T où

$$\begin{aligned} S &= \{x_i, i \in L^+\} \\ T &= \{x_i, i \in L^-\}. \end{aligned}$$

Exercice 35 ▷

35.1) D'après le théorème de Radon, il existe une partition de $x = (x_1, \dots, x_{n+2})$, x_S et x_T deux ensembles disjoints et p tel que

$$p \in \text{conv}(x_S) \cap \text{conv}(x_T)$$

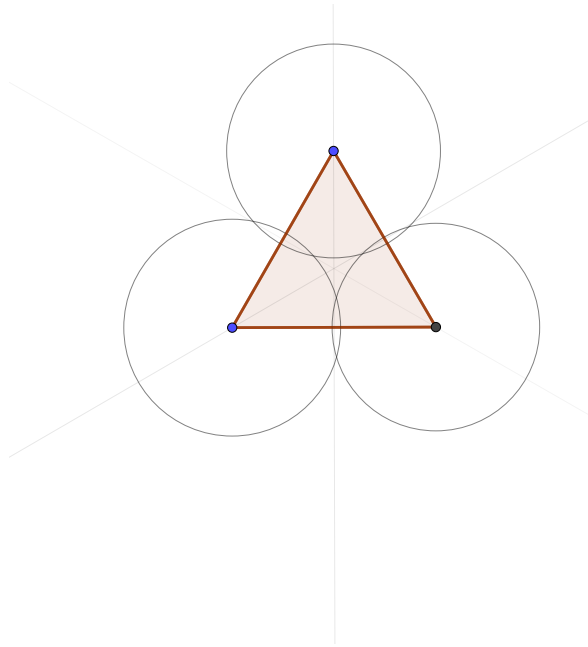
Il nous reste à montrer que p est dans l'intersection de tous les S_i . Le seul élément de x qui peut ne pas être dans B_j c'est x_j . Si $x_j \in S$ alors $x_j \notin T$ donc tous les éléments de T sont dans B_j . Comme B_j est convexe, B_j contient aussi l'enveloppe convexe de T donc p appartient à B_j . De même, si $x_j \in T$ alors p appartient à B_j . Dans tous les cas, p appartient à tous les B_j .

35.2) Au rang $m + 1$, on applique le résultat au rang précédent à la famille

$$S_1, \dots, S_m \cap S_{m+1}$$

et le résultat s'en suit.

35.3) On prend 3 boules situées sur les sommets d'un triangle équilatéral de rayon légèrement supérieure à la demi-longueur d'arête. Comme le rayon du cercle circonscrit est $1/\sqrt{3} \simeq 0,58$ fois la longueur d'arête, les trois boules ne s'intersectent pas.

**Exercice 36** ▷

?? En dérivant deux fois, on voit $x \mapsto x^p$ est convexe. La fonction conjuguée de x^p/p se calcule facilement et donne y^q/q d'où l'identité demandée.

?? On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\|x\|_p} \frac{y_i}{\|y\|_q} &\leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^q}{\|y\|_q^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exercice 38 ▷ Il suffit que h soit croissante en chacun de ses arguments.

Exercice 39 ▷

39.1) Evident d'après l'inégalité triangulaire.

39.2) S'il existe $x \in B(0, 1)$ tel que

$$\langle x', x \rangle_{E', E} - N_E(x) > 0$$

alors pour tout $\alpha > 0$,

$$\langle x', \alpha x \rangle_{E', E} - N_E(\alpha x) = \alpha (\langle x', x \rangle_{E', E} - N_E(x)) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \infty$$

donc $N_E(x') = +\infty$.

39.3) Comme

$$N_{E'}(x') = \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle x', x \rangle|}{N_E(x)} = \rho > 1$$

il existe $x \neq 0$ tel que

$$\langle x', x \rangle \geq \frac{1+\rho}{2} N_E(x)$$

donc

$$\langle x', x \rangle - N_E(x) \geq \frac{\rho-1}{2} N_E(x) > 0.$$

39.4) Si $N_{E'}(x') \leq 1$ alors pour tout $x \in E$,

$$\langle x', x \rangle \leq |\langle x', x \rangle| \leq N_E(x)$$

donc $N_E^*(x') \leq 0$ et comme

$$\langle x', 0 \rangle - N_E(0) = 0,$$

on a égalité.

Exercice 53 ▷

53.1) Ils sont de la forme

$$\sum_{i=1,2,4} \alpha_i (i \wedge .)$$

53.2) On a

$$\langle \sum_{i=1,2,4} \alpha_i (i \wedge .), 1 \wedge . \rangle = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4.$$

Donc

$$\{f\}^\perp = \left\{ \sum_{i=1,2,4} \alpha_i (i \wedge .), \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \right\}.$$

De même

$$\begin{aligned} \{g\}^\perp &= \left\{ \sum_{i=1,2,4} \alpha_i (i \wedge .), \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1,2,4} \alpha_i (i \wedge .), \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_4 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

53.5) On a

$$\left\langle \sum_{i=1,2,4} \alpha_i (i \wedge .), \sum_{i=1,2,4} \beta_i (i \wedge .) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Le produit scalaire est défini par le terme de droite.

53.6) On remarque que

$$MM^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

donc

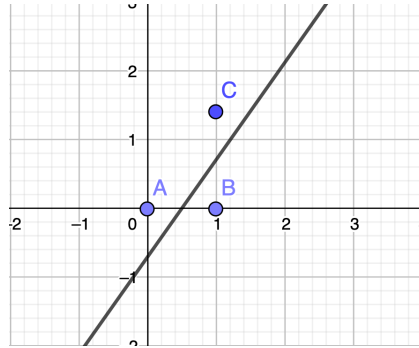
$$\left\langle \sum_{i=1,2,4} \alpha_i (i \wedge \cdot), \sum_{i=1,2,4} \beta_i (i \wedge \cdot) \right\rangle = \langle M\alpha, M\beta \rangle$$

53.7) Comme $\theta(f) = (1, 0, 0)$, $\theta(g) = (0, 1, 0)$ et $\theta(h) = (0, 0, 1)$, on trouve

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Trois points sont toujours coplanaires donc la seule caractéristique qui soit définie est l'intersection des plans optimaux avec le plan qui passe par A , B et C , ici le plan $x = 1$.

53.8) La droite optimale est celle qui passe par le milieu de $[AB]$ et le milieu de $[BC]$.



On a transféré le problème insoluble en dimension 1 en un problème avec une infinité de solutions en dimension 3. C'est la forme particulière du noyau qui induit cette infinité de solutions donc ce n'est pas un bon noyau.