

Examen de mi-parcours OMI 1E1

Notes de cours et notes de TD autorisées
Calculatrices interdites

Octobre 2022

1 Suites bornées

On note ℓ^∞ , l'ensemble des suites de réels bornées muni de la « norme infinie » :
pour une suite $u = (u_n, n \geq 1)$,

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |u_n|.$$

- 1) Montrer que ℓ^∞ est un espace vectoriel.
- 2) Montrer que ℓ^∞ contient les suites de Cauchy pour \mathbf{R} muni de la valeur absolue.
- 3) Soit \mathcal{C} , l'ensemble des suites de Cauchy pour \mathbf{R} muni de la valeur absolue. Montrer que \mathcal{C} est un espace vectoriel de ℓ^∞ .
- 4) Montrer que \mathcal{C} est fermé dans ℓ^∞ .
- 5) Montrer que le produit de deux éléments de \mathcal{C} est encore un élément de \mathcal{C} .

On note ℓ^1 , l'ensemble des suites de réels telles que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ converge.}$$

On munit cet ensemble de la norme

$$\|u\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

- 6) Construire une suite de Cauchy pour la norme uniforme qui ne soit pas dans ℓ^1 .

2 Somme de Minkowsky

Soit $E = \mathbf{R}^2$ muni de la norme euclidienne. Pour deux parties A et B , on pose

$$A + B = \{z \in E, \exists (a, b) \in A \times B \text{ tels que } z = a + b\}.$$

- 7) Soit $b \in \mathbf{R}^2$, montrer que l'application

$$\begin{aligned}\tau_b : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ x &\longmapsto x + b\end{aligned}$$

est une bijection continue.

- 8) Soit A une partie ouverte de E . Montrer que $A + \{b\}$ est ouverte.
9) Soit A ouvert de E , montrer que

$$A + B = \bigcup_{b \in A} A + \{b\}$$

puis que $A + B$ est ouvert.

On considère les parties

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, xy = 1\} \text{ et } B = \{0\} \times \mathbf{R}.$$

- 10) Montrer que les parties A et B sont fermées.
11) Montrer que $A + B$ n'est pas fermée.

On pourra considérer la suite $u_n = (1/n, 1)$.

3 Intégrale fractionnaire

Avertissement : dans cet exercice, on parle d'intégrale au sens de Lebesgue. Vous pouvez la manipuler comme l'intégrale ordinaire, on ne se posera aucun problème de mesurabilité, ni de nullité presque partout.

On note L^1 l'espace des fonctions intégrables (au sens de Lebesgue) sur $[0, 1]$, muni de la « norme »

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(s)| \, ds.$$

Pour $\alpha \in]0, 1]$, pour $f \in L^1$, on pose

$$I^\alpha f(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) \, ds.$$

12) En utilisant le théorème de Fubini, montrer que

$$\int_0^1 I^\alpha(|f|)(s) \, ds = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 |f(s)|(1-s)^\alpha \, ds.$$

13) En déduire que I^α est continue de L^1 dans lui-même.

14) En utilisant le théorème de point fixe, trouver une condition suffisante sur λ qui assure que l'équation

$$I^\alpha f = \lambda f$$

admet une solution dans L^1 .

Correction

1 ▷ Evident

2 ▷ Lemme du cours.

3 ▷ Evident.

4 ▷ Soit $(u^k, k \geq 1)$ une suite d'éléments de ℓ^∞ qui converge vers u dans ℓ^∞ . On suppose de plus que les u^k sont des suites de Cauchy. Il faut prouver que u l'est.

$$\begin{aligned} |u_n - u_p| &\leq |u_n - u_n^k| + |u_n^k - u_p^k| + |u_p^k - u_p| \\ &\leq 2 \|u - u^k\|_\infty + |u_n^k - u_p^k|. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe k tel que

$$\|u - u^k\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Pour cette valeur de k , u^k est de Cauchy donc il existe n_k tel que

$$n, p \geq n_k \implies |u_n^k - u_p^k| \leq \varepsilon.$$

D'où,

$$n, p \geq n_k \implies |u_n - u_p| \leq 3\varepsilon.$$

5 ▷ On a

$$\begin{aligned} |u_n v_n - u_p v_p| &\leq |u_n| |v_n - v_p| + |v_p| |u_n - u_p| \\ &\leq \|u\|_\infty |v_n - v_p| + \|v\|_\infty |u_n - u_p|. \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit.

6 ▷ On prend $u_n = 1/n$. Elle converge donc elle est de Cauchy mais elle n'est pas sommable.

7 ▷ On a

$$\|\tau_b(x) - \tau_b(y)\| = \|x - y\|.$$

La continuité est immédiate. On a aussi

$$(\tau_b)^{-1} = \tau_{-b}.$$

8 ▷ On remarque que

$$A + \{b\} = \tau_b(A) = \tau_{-b}^{-1}(A).$$

Comme τ_{-b} est continue, $A + \{b\}$ est ouvert.

9 ▷ Si $z \in A + B$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $z = a + b$ donc $z \in A + \{b\}$. La réciproque est du même genre.

Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte donc $A+B$ est ouverte.

10 ▷ L'application qui à (x, y) associe xy est continue de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} donc A est fermée. B est le produit cartésien de deux fermés donc est fermé.

11 ▷ On peut écrire

$$(1/n, 1) = (1/n, n) + (0, 1 - n) \in A + B.$$

Le point limite $(0, 1)$ n'appartient pas à $A + B$ parce que tous les points de $A + B$ ont une abscisse non nulle.

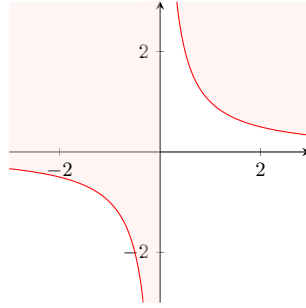


FIGURE 1 – En rouge clair, l'ensemble $A + B$. Il n'intersecte pas l'axe des ordonnées.

12 ▷ Évident.

13 ▷ On a

$$\begin{aligned}
 \|I^\alpha f\|_1 &= \int_0^1 |I^\alpha(f)(s)| \, ds \\
 &\leq \int_0^1 I^\alpha(|f|)(s) \, ds \\
 &\leq \frac{1}{\alpha} \int_0^1 |f(s)|(1-s)^\alpha \, ds \\
 &\leq \frac{1}{\alpha} \int_0^1 |f(s)| \, ds \\
 &= \frac{1}{\alpha} \|f\|_1.
 \end{aligned}$$

14 ▷ L'application $\lambda^{-1}I^\alpha$ a pour norme $1/\lambda\alpha$. Elle est contractante dès que $1/\lambda\alpha < 1$ soit $\lambda > 1/\alpha$.