

L. DECREUSEFOND

ANALYSE
FONCTIONNELLE
&
ANALYSE
CONVEXE

Copyright © 2024 L. Decreusefond

License : Creative Commons BY-NC-SA

December 2024

Table des matières

Liste des symboles exotiques	5
1 Topologie des espaces métriques	11
2 Continuité et compacité	27
3 Densité et complétude	47
4 Espaces de Banach	69
5 Séparation et optimisation	79
6 Fonctions convexes	95
7 Espaces de Hilbert	109
8 Introduction à la classification	139
9 Fonctions à variation bornée	153
A Guide de survie en théorie de la mesure	169

Liste des symboles exotiques

$\langle x', x \rangle_{E', E}$	Crochet de dualité de x' et x	81
$\mathcal{C}(K; Y)$	Fonctions continues du compact K dans l'espace Y	39
$\text{epi}(f)$	Épigraphe de la fonction f	95
χ_A	Fonction indicatrice convexe de A	97
$\mathbf{1}_A$	Fonction indicatrice ordinaire de A	97
$L^p(E, \mu)$	Espace des fonctions de E dans \mathbf{R} , de puissance p -ième μ -intégrable	82
$\ell^p(\mathbf{N})$	Espace des suites de réels de puissance p -ième sommable	49

Introduction

Ce polycopié a été écrit en utilisant les ouvrages suivants :

- Les livres de K. Kuttler (en particulier KUTTLER, *Modern Analysis*) dont certains sont disponibles sur le site de l'auteur <https://klkuttler.com> couvrent pratiquement tous les sujets abordés et même bien plus à l'exception de la convexité.
- Nous verrons quelques théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle tel que les théorèmes de Hahn-Banach, Ascoli-Arzelà, il en existe beaucoup d'autres comme ceux de Banach-Steinhaus ou Banach-Alaoglu, etc. Si ces sujets vous intéressent, vous pouvez consulter avec profit le livre de H. Brézis (BRÉZIS, *Analyse Fonctionnelle*) ou le livre de Meise et Vogt (MEISE, *Introduction to Functional Analysis*) qui contient des preuves quasi optimales pour un certains nombres de théorèmes fondamentaux.
- Pour tout ce qui est théorie de la mesure (qui n'est pas au programme de ce cours), le plus grand classique est le livre de W. Rudin (RUDIN, *Analyse Réelle et Complexe*), qui contient par ailleurs des éléments intéressants sur les espaces de Banach et de Hilbert.
- Enfin pour la convexité, je me suis inspiré du livre de Boyd et Vandenberghe (BOYD et VANDENBERGHE, *Convex optimization*) et du chapitre correspondant dans le Brézis. Le cas des fonctions convexes définies sur \mathbf{R}^n est assez facile à traiter, le cas des fonctions convexes définies sur les espaces de Banach est bien plus complexe ne serait-ce que parce qu'il met en jeu des notions de continuité plus fine que la continuité habituelle. Il y a donc deux sortes d'ouvrage, ceux qui se limitent à la dimension finie et ceux qui traitent le cas plus général comme le Brézis ou le père de tous, le Castaing-Valadier (CASTAING et VALADIER, *Convex analysis and measurable multifunctions*). Pour les théorèmes d'optimisation convexe les plus généraux (attention, mal de tête garanti), il y a le livre d'I. Ekeland et R. Temam (EKELAND et TÉMAM, *Convex Analysis and Variational Problems*).

Avertissement : il n'est ni demandé, ni suggéré de lire ces ouvrages pour valider le module, la liste est juste destinée à ceux qui par goût ou masochisme souhaitent aller plus loin dans l'analyse fonctionnelle.

Bibliographie

- BOYD, S. et L. VANDENBERGHE. *Convex optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- BRÉZIS, H. *Analyse Fonctionnelle*. Masson. 1987.
- CASTAING, C. et M. VALADIER. *Convex analysis and measurable multifunctions*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 580. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977, p. vii+278. URL : <https://partage.imt.fr/index.php/s/BKwo5wSynDZtqxN>.
- EKELAND, I. et R. TÉMAM. *Convex Analysis and Variational Problems*. English. T. 28. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999.
- KUTTNER, K. *Modern Analysis*. English. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, 1998.
- MEISE R. and Vogt, D. *Introduction to Functional Analysis*. T. 2. Oxford Graduate Texts in Mathematics. New York : The Clarendon Press Oxford University Press, 1997.
- RUDIN, W. *Analyse Réelle et Complexe*. Paris : Masson, 1980.
- STEINWART, I., D. HUSH et C. SCovel. "An Explicit Description of the Reproducing Kernel Hilbert Spaces of Gaussian RBF Kernels". In : *IEEE Transactions on Information Theory* 52.10 (2006), p. 4635-4643.

1

Topologie des espaces métriques

1.1 Dénombrabilité

Le concept de dénombrabilité joue un rôle primordial dans de nombreux domaines parce que ce sont les ensembles que l'on peut *dénombrer*, c'est-à-dire dont on peut numéroter les états.

Définition 1.1 Un ensemble est fini s'il est en bijection avec un certain $\{1, \dots, n\}$.

Définition 1.2 Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec \mathbb{N} , l'ensemble des entiers naturels.

■ **Exemple 1.1** Quelques exemples d'ensembles dénombrables ou pas.

- $2\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers pairs, est dénombrable.
- À tout nombre $x \in [0, 1[$, on peut associer son développement diadique *propre*. Soit \mathcal{P} l'ensemble des suites d'éléments de $\{0, 1\}$ qui ne se terminent pas par une infinité de 1 consécutifs :

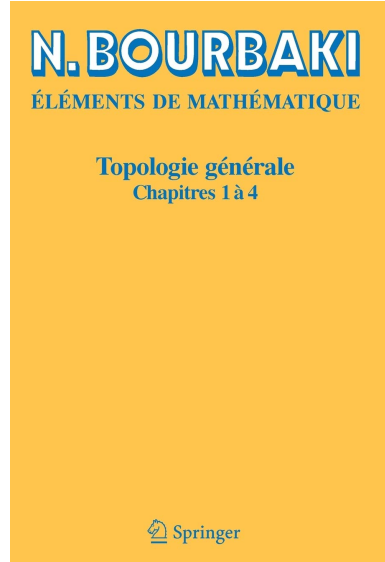
$$\forall n, \exists j \geq n \text{ tel que } x_j = 0.$$

Pour tout $x \in [0, 1[$, il existe une unique suite $(x_n, n \geq 1) \in \mathcal{P}$ telle que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n}.$$

On calcule x_i de façon récursive :

$$\begin{aligned} x_1 &= [2x] \\ x_n &= \left[2^n \left(x - \sum_{j=1}^{n-1} x_j 2^{-j} \right) \right] \end{aligned}$$



où $[x]$ est la partie entière de x . Si l'intervalle $[0, 1[$ est dénombrable, on peut numéroter ses éléments donc

$$x_1 = \sum_{j=1}^{\infty} x_{1j} 2^{-j}$$

$$\vdots$$

$$x_k = \sum_{j=1}^{\infty} x_{kj} 2^{-j}.$$

Le nombre

$$z = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - x_{jj}) 2^{-j}$$

diffère de x_j en son j -ième *chiffre* donc z n'appartient pas à la liste que l'on vient de construire. On ne peut donc pas épuiser tous les éléments de $[0, 1[$ par une suite.

- $\mathcal{P}(\mathbf{N})$, l'ensemble des parties de \mathbf{N} , ne l'est pas. Il est en bijection avec l'ensemble des réels \mathbf{R} . En effet, pour une partie A de \mathbf{N} , on peut définir « la suite indicatrice » $\mathbf{1}_A(n)$ par

$$\mathbf{1}_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est donc clair que $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ est en bijection avec $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$. Puis à cette suite, on peut associer le réel x_A défini par :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathbf{1}_A(n).$$

On obtient donc que $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ est en bijection avec $[0, 1[$ donc n'est pas dénombrable.

■

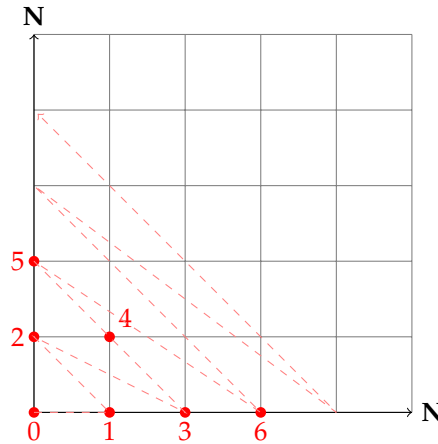
La dénombrabilité est stable par réunion et produit cartésien.

Théorème 1.3 Si X et Y sont deux ensembles dénombrables alors $X \times Y$ et $X \cup Y$ sont dénombrables.

Tout est basé sur le résultat essentiel qui stipule de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ est en bijection avec \mathbf{N} . La bijection est construite comme indiquée sur la figure 1.1. Par exemple, l'élément $(2, 0)$ est envoyé sur 3 et l'élément $(0, 2)$ est envoyé sur 5.

Corollaire 1.4 L'ensemble des entiers relatifs, \mathbf{Z} , est dénombrable.

Le théorème suivant est loin d'être trivial.


 FIGURE 1.1: Bijection de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ avec \mathbf{N} .

Théorème 1.5 S'il existe une injection de l'ensemble X dans l'ensemble Y et une injection de Y dans X alors il existe une bijection de X dans Y .

Corollaire 1.6 L'ensemble des rationnels, \mathbf{Q} est dénombrable.

Démonstration. Il existe évidemment une injection de \mathbf{N} dans \mathbf{Q} et par construction de \mathbf{Q} , il existe une injection de \mathbf{Q} dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, qui d'après le théorème précédent est en bijection avec \mathbf{N} . Par conséquent, \mathbf{Q} est en bijection avec \mathbf{N} . ■

Une suite d'éléments d'un ensemble E est une famille dénombrable et ordonnées d'éléments de $E : x = (x_n \mid n \in \mathbf{N})$. On aura très souvent recours à la notion de suite extraite, c'est-à-dire d'une suite composée d'une partie seulement des éléments de x . Il est d'usage d'écrire

$$(x_{n_k}, k \in \mathbf{N}).$$

Cette notation s'avère moyennement agréable quand il s'agit d'extraire des sous-suites de suites extraites. Une autre façon de présenter les suites extraites se fait au moyen d'une fonction ϕ croissante de \mathbf{N} dans \mathbf{N} et de considérer

$$x_\phi = (x_{\phi(k)}, n \in \mathbf{N}).$$

Le lien avec la présentation précédente se fait en prenant

$$\begin{aligned} \phi : \mathbf{N} &\longrightarrow \mathbf{N} \\ k &\longmapsto n_k. \end{aligned}$$

Pour extraire une suite d'une sous-suite, il suffit de considérer $x_{\psi \circ \phi}$.

Vous avez accès aux corrigés de cette feuille à [cette URL](#).

Exercice 1.1 Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

- 1) $\{2^n; n \geq 0\}$;
- 2) $\mathbf{N} \times \mathbf{R}$;
- 3) $\mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbf{Q}\}$;
- 4) l'ensemble des nombres premiers;
- 5) l'ensemble des fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

■

Exercice 1.2 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction croissante bornée. Pour $x \in]a, b[$, on pose $\delta(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y) - \lim_{y \rightarrow x^-} f(y)$ (c'est le « saut » de f en x).

- 1) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, démontrer que $E_n = \{x \in]a, b[; \delta(x) > 1/n\}$ est fini.
- 2) En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
- 3) Généraliser ce résultat au cas où f est définie sur \mathbf{R} .

■

1.2 Maximum, majorant, borne supérieure

Définition 1.7 Une relation d'ordre \preccurlyeq sur un ensemble E est une relation qui vérifie les axiomes suivants :

Réflexivité : $x \preccurlyeq x$, pour tout $x \in E$,

Anti-symétrie : $(x \preccurlyeq y)$ et $(y \preccurlyeq x)$ implique $x = y$,

Transitivité $(x \preccurlyeq y)$ et $(y \preccurlyeq z)$ implique $(x \preccurlyeq z)$.

L'ensemble E est totalement ordonné si pour tout couple d'éléments de E , x et y , on a

$$(x \preccurlyeq y) \text{ ou } (y \preccurlyeq x).$$

Sinon, E est dit partiellement ordonné.

■ **Exemple 1.2** Au delà de l'exemple de \mathbf{R} et de l'ordre naturel, on utilise fréquemment l'ordre partiel donné par la relation d'inclusion sur les sous-ensembles de E . ■

Définition 1.8 Soit P une partie de (E, \preccurlyeq) . L'élément c de E est un majorant de P si

$$\forall x \in P, x \preccurlyeq c.$$

Un élément c de P est maximal si

$$c \preccurlyeq x \text{ et } x \in P \implies x = c.$$

Un ensemble (E, \preccurlyeq) est dit inductif si tout sous-ensemble ordonné de E admet un majorant.

Le résultat principal qui est en filigrane de nombre de théorèmes à venir est le lemme de Zorn.

Lemme 1.9 Tout ensemble totalement ordonné, inductif, non vide admet un élément maximal.

Définition 1.10 Soit $P \subset E$, si l'ensemble des majorants de P admet un plus petit élément M , on dit que M est la borne supérieure de P . On note

$$M = \sup\{x, x \in P\}.$$

La borne inférieure de P est m , le plus grand majorant (s'il existe) des minorants de P . On note

$$m = \inf\{x, x \in P\}.$$

Dans \mathbf{R} , on a la caractérisation suivante :

Définition 1.11 Soit $A \subset \mathbf{R}$, A admet une borne inférieure, notée $\inf A$ si

- 1) $\forall x \in A, x \geq \inf A$
- 2) $\forall \epsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $x \leq \inf A + \epsilon$.

A a une borne supérieure, notée $\sup A$ si

- 1) $\forall x \in A, x \leq \sup A$
- 2) $\forall \epsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $x \geq \sup A - \epsilon$.

En prenant les valeurs successives de $\epsilon = 1, 1/2, 1/3, \dots$, on voit qu'il existe une suite $(x_n, n \geq 1)$ d'éléments de A tels que

$$\inf A \leq x_n \leq \inf A + \frac{1}{n},$$

c'est-à-dire une suite de points de A qui approche aussi près que possible la borne inférieure de A . L'un des enjeux est de savoir si cette borne est atteinte, i.e. est-ce que x_n converge vers un point de A ou pas?

■ **Exemple 1.3** Si $A = \{1/x, x \geq 1\}$ alors $\inf A = 0$ mais n'est jamais atteinte. ■

1.3 Distances

Définition 1.12 Un ensemble non vide E est dit *métrique* s'il existe une fonction *distance* $d : E \times E \rightarrow [0, +\infty[$ qui satisfait les axiomes suivants :

- 1) $d(x, y) = d(y, x)$,
- 2) $d(x, y) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = y$,
- 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

■ **Exemple 1.4** *Distance sur \mathbf{R}* : Sur \mathbf{R} , on considère $d(x, y) = |x - y|$. C'est une distance en vertu de l'inégalité triangulaire.

Distance à partir d'autres distances : Si d_1, \dots, d_n sont des distances sur E_1, \dots, E_n alors pour tout $p \geq 1$,

$$d_p((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \left(\sum_{k=1}^n d_k(x_k, y_k)^p \right)^{1/p} \quad (1.1)$$

est une distance sur $E = E_1 \times \dots \times E_n$. Voir la démonstration dans les exercices.

Transformation par une fonction : Si $\phi : E \rightarrow F$ est bijective, alors

$$d_F(\phi(x), \phi(y)) = d_E(x, y)$$

est une distance sur F .

Distance euclidienne : Sur \mathbf{R}^2 l'ensemble des points du plan dont on nota les coordonnées (x_1, x_2) , on pose

$$d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Distance ℓ^p : Sur \mathbf{R}^n , on considère aussi les distances dites ℓ^∞

$$d_\infty((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_{k=1}^n |x_k - y_k|$$

et plus généralement ℓ^p pour $p \geq 1$,

$$d_p((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Distance de Hamming : Sur $\{0, 1\}^N$, on considère souvent la distance par

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{x_k \neq y_k\}}.$$

Graphe : Sur un graphe, la distance entre deux points est le nombre d'arêtes du plus court chemin entre les deux points.

■

Certaines de ces distances sont des cas particuliers de normes. Pour les espaces vectoriels (i.e., des espaces où l'on a une notion d'addition et de multiplication par un scalaire), on a souvent la notion de norme.

Définition 1.13 Soit E un espace vectoriel, une norme N_E est une application de E dans \mathbf{R}^+ qui satisfait les propriétés suivantes :

- 1) $N_E(x) = 0 \iff x = 0$
- 2) $N_E(\lambda x) = |\lambda| N_E(x)$
- 3) $N_E(x + y) \leq N_E(x) + N_E(y)$

Dans ces conditions,

$$d_E(x, y) = N_E(x - y)$$

est une distance sur E .

■ **Exemple 1.5** 1) L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ est souvent muni de la *norme uniforme* ou *norme infinie*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

- 2) La distance euclidienne est une norme, de même que toutes les distances ℓ^p .

On verra bien d'autres normes plus tard dans ce cours. ■

Définition 1.14 La boule ouverte centrée en x et de rayon r , notée $B(x, r)$, est l'ensemble

$$\{y \in E, d(x, y) < r\}.$$

Un ensemble U est dit *ouvert* si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ (dépendant de x) tel que $B(x, r) \subset U$.

Pour un ensemble U quelconque, les points $x \in U$ pour lesquels il existe une telle boule forment l'*intérieur* de U .

Un ouvert n'est donc rien d'autre qu'un ensemble dont tous les points sont intérieurs.

L'intérieur d'un ensemble A , noté $\overset{\circ}{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A .

Lemme 1.15 Une *boule ouverte* est un ensemble ouvert.

Définition 1.16 Soit $S \neq \emptyset$. Le point p est une valeur d'adhérence de S si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, $B(p, \epsilon) \cap S$ est non vide.

■ **Exemple 1.6** Les points 1 et -1 sont deux valeurs d'adhérence de l'ensemble $S = \{(-1)^n, n \geq 0\}$. ■

Définition 1.17 On dit que x est la limite de la suite $(x_n, n \geq 1)$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_\epsilon > 0$ tel que

$$n \geq n_\epsilon \implies d(x, x_n) < \epsilon.$$

Notons qu'à l'inverse des valeurs d'adhérence qui peuvent être multiples, la limite d'une suite, si elle existe, est nécessairement unique.

Au final, les valeurs d'adhérence sont les limites des suites extraites comme le prouve le théorème suivant.

Théorème 1.18 Soit $S \neq \emptyset$. Le point p est une valeur d'adhérence de S si et seulement si il existe une suite $(x_n, n \geq 1)$ de points de S dont p est la limite.

On note \bar{S} , l'ensemble des points adhérents à S .

Démonstration. On procède par double implication.

ÉTAPE \implies . On applique la définition des valeurs d'adhérence pour $\epsilon = 1, 1/2, 1/3, \dots$. Il existe donc $x_n \in S$ tel que

$$d(x_n, p) \leq \frac{1}{n}.$$

La suite ainsi construite converge bien vers p .

ÉTAPE \impliedby . Par définition de la convergence d'une suite, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_n \in S$ tel que

$$d(x_n, p) \leq \epsilon,$$

ce qui signifie que

$$x_n \in B(p, \epsilon) \cap S,$$

donc p est bien adhérent à S . ■

Définition 1.19 Un ensemble F est fermé si son complémentaire est ouvert.

Théorème 1.20 Un ensemble est fermé si et seulement si il contient toutes ses valeurs d'adhérence. Autrement dit, F est fermé si et seulement si

$$F = \bar{F}.$$

Démonstration.

ÉTAPE \implies . Soit F fermé et x une valeur d'adhérence de F . Si x n'appartient pas à F , il appartient à son complémentaire qui, par définition, est

ouvert. Par définition d'un ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset F^c$ donc en particulier

$$(B(x, \delta) \cap F) \subset (F^c \cap F) = \emptyset,$$

ce qui est contraire à la définition d'une valeur d'adhérence. Par conséquent, toutes les valeurs d'adhérence de F appartiennent à F .

ÉTAPE \Leftarrow . On suppose que $\bar{F} \subset F$ et l'on veut montrer que F^c est un ouvert. Soit $x \in F^c$, x n'est donc pas une valeur d'adhérence de F .

En niant la définition des valeurs d'adhérence, on obtient qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \cap F$ soit vide. Autrement dit, $B(x, \delta) \subset F^c$ donc F^c est ouvert. ■

Corollaire 1.21 — Critère de fermeture. Un ensemble F est fermé si et seulement si toute suite de points de F qui converge, converge vers un point de F .

Démonstration.

ÉTAPE \Rightarrow . Soit F fermé et $(x_n, n \geq 1)$ une suite de points de F qui converge vers x . Par définition, x est une valeur d'adhérence de F donc appartient à F .

ÉTAPE \Leftarrow . Réciproquement, si toute suite de points de F qui converge a une limite dans F , d'après le théorème 1.18, cela signifie que toutes les valeurs d'adhérence de F appartiennent à F donc que F est fermé d'après le théorème 1.20. ■

■ **Exemple 1.7 1)** On en déduit que trivialement un point (i.e. un ensemble qui est un singleton) est un fermé.

2) La *boule fermée*

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in E, d(x, y) \leq r\}$$

est un ensemble fermé. ■

La notion d'image réciproque est très utile.

Définition 1.22 Soit $f: E \rightarrow F$ et $A \subset F$,

$$f^{-1}(A) = \{x \in E, f(x) \in A\}.$$

Les notations peuvent prêter à confusion. Si f est bijective, f^{-1} est sa fonction réciproque telle que $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ mais pour définir $f^{-1}(A)$, la bijectivité n'est pas nécessaire.

Lemme 1.23 Les images réciproques ont de nombreuses propriétés :

1) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, pareil pour une intersection d'un nombre quelconque d'ensemble.

- 2) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, pareil pour une réunion d'un nombre quelconque d'ensemble.
- 3) $(f \circ g)^{-1}(A) = g^{-1}(f^{-1}(A))$
- 4) $f(f^{-1}(A)) \subset A$ avec égalité si f est surjective
- 5) $A \subset f^{-1}(f(A))$ avec égalité si f est injective

Démonstration. Laissée en exercice. ■

Exercice 1.3 Montrer que l'union d'un nombre dénombrable d'ouverts est un ouvert. Trouver un contre-exemple qui montre que l'intersection d'un nombre dénombrable d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. ■

Exercice 1.4 En admettant que

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p},$$

montrer que la fonction définie par (1.1) est bien une distance. ■

■ **Exemple 1.8 — Loi des événements rares.** Terminons ce chapitre par un exemple de distance sur un espace un peu inhabituel, celui des mesures de probabilités sur \mathbf{N} .

Définition 1.24 On note \mathcal{P} l'ensemble des mesures de probabilités sur \mathbf{N} , c'est-à-dire l'ensemble des suites de nombres réels positifs dont la somme fait 1 :

$$\mathcal{P} = \left\{ P = (p_n)_{n \geq 0}, p_k \geq 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \right\}.$$

Pour tout ensemble $A \subset \mathbf{N}$, on note

$$P(A) = \sum_{n \in A} p_n$$

qui représente évidemment la probabilité de l'ensemble A pour la mesure de probabilité P .

Définition 1.25 — Distance en variation totale. Pour deux probabilités P et Q , on définit

$$d(P, Q) = \sup_{A \subset \mathbf{N}} (P(A) - Q(A)).$$

Il existe d'autres représentations de cette distance.

Lemme 1.26 Pour deux probabilités P et Q sur \mathbf{N} , on a

$$d(P, Q) = \sup_{A \subset \mathbf{N}} |P(A) - Q(A)| \quad (1.2)$$

$$= \sum_{n \geq 0} (p_n - q_n)^+ \quad (1.3)$$

où $p_n = P(\{n\})$ et $q_n = Q(\{n\})$.

Démonstration. ÉTAPE 1. Montrons d'abord (1.2). On a

$$\begin{aligned} |P(A) - Q(A)| &= \sup(P(A) - Q(A), Q(A) - P(A)) \\ &= \sup(P(A) - Q(A), P(A^c) - Q(A^c)). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sup_A |P(A) - Q(A)| &\leq \sup_A \sup(P(A) - Q(A), P(A^c) - Q(A^c)) \\ &= \sup_A (P(A) - Q(A)). \end{aligned}$$

L'inégalité

$$d(P, Q) \leq \sup_{A \subset \mathbf{N}} |P(A) - Q(A)|$$

est évidente.

ÉTAPE 2. D'autre part part, on a

$$\begin{aligned} P(A) - Q(A) &= \sum_{n \in A} (p_n - q_n) \\ &\leq \sum_{n \in A} (p_n - q_n)^+ \\ &\leq \sum_{n \in \mathbf{N}} (p_n - q_n)^+ \end{aligned}$$

avec égalité si $A = \{n, p_n \geq q_n\}$. Ce qui donne (1.3) ■

Théorème 1.27 La fonction d est une distance sur \mathcal{P} .

Démonstration. Pour l'inégalité triangulaire, on remarque pour tout $B \subset \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} |P(B) - R(B)| &\leq |P(B) - Q(B)| + |Q(B) - R(B)| \\ &\leq \sup_{A \subset \mathbf{N}} |P(A) - Q(A)| + \sup_{A \subset \mathbf{N}} |Q(A) - R(A)| \\ &= d(P, Q) + d(Q, R). \end{aligned}$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout ensemble B et que le majorant ne dépend pas de B , on en déduit que

$$d(P, R) = \sup_{B \subset \mathbf{N}} |P(B) - R(B)| \leq d(P, Q) + d(Q, R).$$

Les autres propriétés sont évidentes donc d est une distance. ■

En termes de variables aléatoires, on peut trouver une autre expression plus intuitive de la distance en variation totale. Soit deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace (Ω, \mathcal{A}) de lois respectives P et Q :

$$\mathbf{P}(X \in A) = P(A) \text{ et } \mathbf{P}(Y \in A) = Q(A).$$

Avant de donner le résultat suivant, il est nécessaire de faire un petit rappel de probabilités : les lois dites *marginale*s de X et de Y ne suffisent pas à caractériser la loi du couple (X, Y) . Supposons par exemple que X et Y soient toutes deux de loi uniforme dans $\{1, 2\}$:

$$\mathbf{P}(X = i) = \mathbf{P}(Y = i) = \frac{1}{2}, \forall i = 1, 2.$$

Dans un premier cas, on peut considérer que la loi du couple est donnée par

$$\mathbf{P}(X = i, Y = i) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbf{P}(X \neq Y) = 0.$$

On retrouve bien que X et Y suivent une loi uniforme sur $\{1, 2\}$. On peut tout aussi bien avoir (X, Y) de loi uniforme sur $\{1, 2\}^2$, qui donne les mêmes marginales. Toute loi de couple qui respecte les marginales s'appelle un *couplage*. Le couplage optimal (s'il existe) est celui qui minimise la probabilité que X soit différent de Y . L'importance de cette notion apparaît dans le lemme suivant.

Lemme 1.28 On a la représentation suivante :

$$d(P, Q) = \inf\{\mathbf{P}(X \neq Y), \text{Loi}(X) = P, \text{Loi}(Y) = Q\}. \quad (1.4)$$

Dans la suite, on pose

$$C = \{X = Y\}.$$

Démonstration. ÉTAPE 1. Dans une première étape, on va montrer que

$$\mathbf{P}(X \in A) - \mathbf{P}(Y \in A) \leq \mathbf{P}(C^c). \quad (1.5)$$

On a

$$\begin{aligned} P(A) - Q(A) &= \mathbf{P}(X \in A; X = Y) + \mathbf{P}(X \in A; X \neq Y) \\ &\quad - \mathbf{P}(Y \in A; X = Y) - \mathbf{P}(Y \in A; X \neq Y) \\ &= \mathbf{P}(X \in A; X \neq Y) - \mathbf{P}(Y \in A; X \neq Y) \\ &\leq \mathbf{P}(X \neq Y), \end{aligned}$$

en oubliant le terme négatif et en majorant la probabilité de l'intersection par la probabilité d'un seul des deux événements.

ÉTAPE 2. Le terme de droite de (1.5) ne dépend pas de A donc

$$d(P, Q) \leq \mathbf{P}(X \neq Y)$$

pour tous les couples de variables aléatoires X et Y de loi respective P et Q . L'ensemble de tels couples est non vide puisqu'il suffit de prendre X et Y indépendantes donc l'ensemble de réels,

$$\{\mathbf{P}(X \neq Y), \text{Loi}(X) = P, \text{Loi}(Y) = Q\}$$

admet une borne inférieure et

$$d(P, Q) \leq \inf\{\mathbf{P}(X \neq Y), \text{Loi}(X) = P, \text{Loi}(Y) = Q\}.$$

ÉTAPE 3. L'inégalité dans l'autre sens repose sur la notion de couplage optimal en probabilités que nous n'aborderons pas ici. ■

Soit (X_1, \dots, X_n) et (Y_1, \dots, Y_n) deux familles de variables aléatoires identiquement distribuées. Soit P , respectivement Q , la loi de la somme des X_i , respectivement des Y_i .

Lemme 1.29 On a une majoration digne d'une norme :

$$d(P, Q) \leq n d(\mathbf{P}_{X_1}, \mathbf{P}_{Y_1}). \quad (1.6)$$

Démonstration. ÉTAPE 1. Montrons d'abord que

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=1}^n Y_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \neq Y_i).$$

En passant aux complémentaires, on a

$$\bigcap_{i=1}^n (X_i = Y_i) \subset \left(\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i\right)$$

donc

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=1}^n Y_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^n (X_i \neq Y_i).$$

On conclut grâce à la borne de l'union.

ÉTAPE 2. Comme les variables aléatoires sont identiquement distribuées

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \neq Y_i) = n \mathbf{P}(X_1 \neq Y_1).$$

Il suffit ensuite d'appliquer (1.4). ■

On admet maintenant que (voir ci-dessous)

$$d(\text{Ber}(p), \text{Poisson}(p)) \leq p^2. \quad (1.7)$$

On en déduit le résultat final.

Théorème 1.30 — Loi des événements rares. La distance entre la loi binomiale de paramètres n et p et la loi de Poisson de paramètre np est majorée explicitement comme suit :

$$d\left(\text{Bin}(n, p), \text{Poisson}(np)\right) \leq np^2.$$

Démonstration. Choisissons pour X_i la loi de Bernoulli de paramètre p et Y_i la loi de Poisson de paramètre p . Comme $\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et p et $\sum_{i=1}^n Y_i$ suit une loi de Poisson de paramètre np , on conclut grâce à (1.6). ■

Si maintenant on considère que

$$p_n = \frac{\lambda}{n}$$

alors on obtient

$$d\left(\text{Bin}(n, p_n), \text{Poisson}(\lambda)\right) \leq \frac{\lambda^2}{n},$$

c'est-à-dire la version quantitative de la loi dite des événements rares. ■

■ **Remarque 1 — Couplage optimal.** Pour montrer (1.7), on peut utiliser la technique de couplage optimal. Soit P et Q deux mesures de probabilités sur \mathbf{N} , on pose

$$c = \sum_i \min(p_i, q_i).$$

On suppose $c \in]0, 1[$. Soient I , V , W_1 et W_2 des variables aléatoires indépendantes choisies telles que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(I = 1) &= c \\ \mathbf{P}(V = n) &= \frac{1}{c}(p_n \wedge q_n) \\ \mathbf{P}(W_1 = n) &= \frac{p_n - c \mathbf{P}(V = n)}{1 - c} \\ \mathbf{P}(W_2 = n) &= \frac{q_n - c \mathbf{P}(V = n)}{1 - c} \end{aligned}$$

On pose enfin

$$\hat{X}_i = \begin{cases} V & \text{si } I = 1, \\ W_i & \text{si } I = 0. \end{cases}$$

Dans ces conditions,

$$\mathbf{P}(\hat{X}_i = n) = \mathbf{P}(V = n)\mathbf{P}(I = 1) + \mathbf{P}(W_i = n)\mathbf{P}(I = 0) = \mathbf{P}(X_i = n).$$

Par construction,

$$\mathbf{P}(X = Y) = \mathbf{P}(I = 0) = c.$$

Pour X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p et Y qui suit une loi de Poisson de paramètre p , on a

$$\begin{aligned} 1 - p &\leq e^{-p} \\ p &\geq pe^{-p} \end{aligned}$$

donc, comme $e^{-p} \geq 1 - p$,

$$c = 1 - p + pe^{-p} \geq 1 - p + p(1 - p) = 1 - p^2.$$

Par conséquent, en utilisant (1.4), on obtient

$$d(P, Q) \leq 1 - c \leq p^2.$$

Le même genre d'argument permet de montrer l'égalité dans (1.4). ■

2

Continuité et compacité

2.1 Fonctions continues

Définition 2.1 Soit $f : (E, d) \rightarrow (Y, \rho)$. La fonction f est continue en $x \in E$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r_{\epsilon, x} > 0$ tel que

$$\forall y \in B(x, r_{\epsilon, x}), \rho(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

La fonction f est continue sur E si elle est continue en tout point de E .

Théorème 2.2 Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) La fonction f est continue en x .
- 2) Pour toute suite $(x_n, n \geq 1)$ qui converge vers x , $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.

Démonstration.

\Rightarrow Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $B(x, \delta)$ tel que

$$y \in B(x, \delta) \implies d(f(y), f(x)) < \epsilon.$$

Comme x_n converge vers x , il existe $n_{x, \delta}$ tel que

$$n \geq n_{x, \delta} \implies d(x_n, x) < \delta.$$

Par conséquent,

$$n \geq n_{x, \delta} \implies \rho(f(x_n), f(x)) < \epsilon.$$

Ce qui signifie bien que $f(x_n)$ tend vers $f(x)$.

\Leftarrow Si f n'est pas continue en x alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $r > 0$, il existe $y \in B(x, r)$ tel que

$$d(f(y), f(x)) > \epsilon.$$

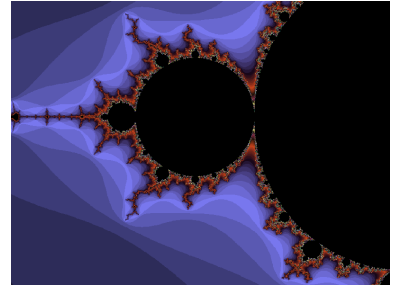


FIGURE 2.1: Ensemble de Mandelbrot

En prenant $r = 1, 1/2, 1/3, \dots$, on construit une suite $(x_n, n \geq 1)$ tels que

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n} \text{ et } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon. \quad (2.1)$$

Or, d'après l'hypothèse, comme, en vertu de la première partie de (2.1), x_n converge vers x , $f(x_n)$ converge vers $f(x)$, ce qui est contraire à la deuxième partie de (2.1). ■

Théorème 2.3 Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) f est continue sur E
- 2) L'image réciproque d'un ouvert de Y par f est un ouvert de E
- 3) L'image réciproque d'un fermé de Y par f est un fermé de E

Démonstration.

ÉTAPE 1. \implies 2.. Soit V un ouvert de Y . Soit $x \in f^{-1}(V)$. On a par définition de l'image réciproque, $f(x) \in V$. Or V est un ouvert donc il existe ϵ tel que $B(f(x), \epsilon) \subset V$. Comme f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} z \in B(x, \delta) &\implies \rho(f(z), f(x)) < \epsilon \\ &\iff f(z) \in B(f(x), \epsilon). \end{aligned}$$

Or $B(f(x), \epsilon) \subset V$ donc $f(z) \in V$. Autrement dit, $f^{-1}(V)$ contient $B(x, \delta)$ donc est un ouvert.

ÉTAPE 2. \iff 3.. Évident puisque $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

ÉTAPE 3. \implies 1.. Soit $x \in E$. Considérons l'ouvert $B(f(x), \epsilon)$. Son image réciproque est un ouvert donc contient $B(x, \delta)$ pour un certain $\delta > 0$. Mais dire que

$$B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$$

revient à dire que pour tout z distant de x de moins de δ , $f(z)$ appartient à $B(f(x), \epsilon)$, ou encore

$$d(x, z) < \delta \implies \rho(f(z), f(x)) < \epsilon,$$

ce qui est exactement la définition de la continuité. ■

■ **Exemple 2.1** a- Du point de vue topologique, l'ensemble des matrices $n \times n$, noté $M_n(\mathbf{R})$, est de la même nature que \mathbf{R}^{n^2} . Pour n'importe laquelle des normes ℓ^p , la fonction déterminant

$$\begin{aligned} \det : M &\longmapsto \det M \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{1\sigma(1)} \dots m_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

La propriété suivante est fort utile pour démontrer que des ensembles sont des fermés ou des ouverts.

est une fonction polynomiale des coefficients $(m_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$ de M donc elle est continue. L'ensemble $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ est le complémentaire d'un fermé dans \mathbf{R} donc c'est un ouvert. Par conséquent, l'ensemble des matrices inversibles est un ouvert.

- b- Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue, son graphe $\mathcal{G} = \{(x, f(x)), x \in \mathbf{R}\}$ est un ensemble fermé : on considère la fonction

$$G : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto y - f(x)$$

qui est continue. Comme $\mathcal{G} = G^{-1}(\{0\})$, on en déduit que \mathcal{G} est fermé.

■

Définition 2.4 L'adhérence d'un ensemble A , noté \overline{A} , est aussi le plus petit fermé contenant A (dont l'existence est garantie par le lemme de Zorn). Un ensemble A est dense dans E lorsque $\overline{A} = E$.

On appelle intérieur de A , noté $\overset{\circ}{A}$, le plus grand ouvert contenu dans A .

On appelle frontière de A , notée ∂A ,

$$\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Exercice 2.1 Soit f continue. Montrer que

$$\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A}).$$

■

Exercice 2.2 Montrer que $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

■

Exercice 2.3 Soit (E, d) un espace métrique et $x_0 \in E$.

- 1) Montrer que l'application $y \mapsto d(x_0, y)$ est continue.
- 2) En déduire qu'une boule ouverte est ouverte et qu'une boule fermée est fermée.
- 3) Quelle est la frontière d'une boule dans un espace métrique ?

■

Exercice 2.4 1) Montrer

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

- 2) En déduire que ∂A est fermée.
- 3) Quelle est la frontière de \mathbf{Q} ?

Exercice 2.5 Le support d'une fonction à valeurs réelles est l'adhérence de l'ensemble des points où elle ne s'annule pas :

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in E, f(x) \neq 0\}}.$$

- 1) Quelle est la nature topologique du support de f ?
- 2) Quel est le support de $x \mapsto x^2$?
- 3) Construire une fonction \mathcal{C}^1 à support dans $[-1, 1]$.

Pour f, g continue sur \mathbf{R} à supports dans $[0, 1]$, on pose

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y)g(x-y) \, dy.$$

On admet que l'on peut considérer que f et g sont nulles sur $[0, 1]^c$.

- 4) Montrer que $f * g$ est bien défini.
- 5) Montrer que

$$\text{supp } f * g \subset [0, 2]$$

On peut montrer plus généralement que

$$\text{supp } f * g \subset \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}.$$

2.2 Ensembles compacts

Définition 2.5 Un ensemble K d'un espace métrique est compact si pour tout recouvrement de K par des ouverts, il existe un sous-recouvrement fini.

Lemme 2.6 Une réunion finie de compacts est compacte.

Démonstration. Soit $(U_i, i \geq 1)$ une famille d'ouverts qui recouvre $K = \bigcup_{j=1}^n K_j$, une réunion finie de compacts. Pour tout j , on note

$$I_j = \{i, U_i \cap K_j \neq \emptyset\}.$$

On a nécessairement

$$K_j \subset \bigcup_{k \in I_j} U_k$$

sinon les U_i ne seraient pas un recouvrement de K . Comme K_j est compact on peut restreindre son recouvrement à un nombre fini des U_i .

Cela revient à dire que quitte à les restreindre, on peut considérer que les I_j sont finis donc

$$\bigcup_{j=1}^n \bigcup_{k \in I_j} U_k$$

est bien un recouvrement fini de K . ■

Définition 2.7 Un ensemble K est dit séquentiellement compact si de toute suite, on peut extraire une sous-suite convergente vers un point de K .

Théorème 2.8 — Théorème de Bolzano-Weierstrass. Dans un espace métrique (E, d) , il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

- 1) K est compact.
- 2) Toute suite décroissantes de fermés non vides de K admet une intersection non vide.
- 3) K est séquentiellement compact.

En d'autres termes, toute suite de points de K admet au moins une valeur d'adhérence.

Ce théorème nécessite des lemmes préparatoires.

Lemme 2.9 — Séquentiellement compact implique totalement borné. Soit K un ensemble séquentiellement compact. Quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement de K par une famille finie de boules de rayon inférieur à ϵ .

Démonstration. Par l'absurde, si la propriété voulue est fausse alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x_1 \in K$, il existe x_2 qui n'appartient pas à $B(x_1, \epsilon)$. De même, il existe

$$x_3 \notin B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon).$$

On peut itérer le procédé et construire une suite telle que

$$d(x_n, x_{n+p}) > \epsilon, \quad \forall n, p.$$

On ne peut pas en extraire une suite convergente d'où une contradiction avec l'hypothèse de séquentielle compacité. ■

Lemme 2.10 — Nombre de Lebesgue. Soit K séquentiellement compact et $(O_i, i \in I)$ un recouvrement d'ouverts de K . Il existe

$r > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe i_x satisfaisant

$$B(x, r) \subset O_{i_x}.$$

Démonstration. Le contraire de la propriété désirée est que pour tout choix de $r > 0$, il existe $x \in K$ tel que $B(x, r)$ ne soit incluse dans aucun O_i . On prend $r = 1, 1/2, 1/3, \dots$ et l'on construit ainsi une suite $(x_n, n \in \mathbf{N})$ tel que $x_n \in K$ et $B(x_n, 1/n)$ ne soit incluse dans aucun O_i . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite x_n converge vers un point $x \in K$. Comme les O_i recouvrent K , il existe $i_0 \in I$ tel que x appartienne à O_{i_0} .

Comme O_{i_0} est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O_{i_0}$. Mézalor, si l'on choisit n tel que $d(x, x_n) < r/2$ et $1/n < r/2$, pour $y \in B(x_n, 1/n)$,

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq r. \quad (2.2)$$

Donc, on a

$$B(x_n, 1/n) \subset B(x, r) \subset O_{i_0},$$

d'où la contradiction. ■

Nous pouvons maintenant montrer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Démonstration.

ÉTAPE 1. \implies 2.. Soit $(F_n, n \geq 1)$ une suite décroissante de fermés de K , on note F_n^c le complémentaire de F_n dans K . On a

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c = K.$$

Par conséquent, si 2. est faux, les F_n^c réalise un recouvrement ouvert de K . Il suffit d'en prendre un nombre fini pour recouvrir K donc il existe n_0 fini tel que

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} F_n^c,$$

ce qui implique

$$F_{n_0} = \bigcap_{n=1}^{n_0} F_n \subset K^c.$$

Or F_{n_0} est, par hypothèse, un sous-ensemble de K donc

$$F_{n_0} = \emptyset$$

ce qui est contraire à l'hypothèse sur les F_n , d'où la contradiction.

ÉTAPE 2. \implies 3.. Soit $(x_j, j \geq 1)$ une suite de points de K et considérons

$$A_k = \{x_j, j \geq k\} \text{ et } F_k = \text{adhérence de } A_k.$$

Les F_k forment une famille décroissantes de fermés non vides donc il existe un point commun à tous, noté y . On va montrer que l'on peut

extraire de la suite initiale, une suite qui converge vers y . Comme y est dans $F_1 = \overline{A_1}$, on sait qu'il existe x_j tel que

$$d(y, x_j) \leq 1.$$

Posons $y_1 = x_j$ et $\varphi(1) = j$. Supposons construits φ et y_1, \dots, y_m tels que $y_j \in F_{\varphi(j)}$ et

$$d(y, y_l) \leq \frac{1}{l}, \quad \forall 1 \leq l \leq m.$$

Comme y appartient à $F_{\varphi(m)}$, il existe un indice, noté $\varphi(m+1) > \varphi(m)$ tel que

$$d(y, x_{\varphi(m+1)}) \leq \frac{1}{m+1}.$$

On pose $y_{m+1} = x_{\varphi(m+1)}$ et on a bien construit une suite extraite qui converge vers y .

ÉTAPE 3. \implies 1.. Soit $(O_i, i \in I)$ un recouvrement ouvert de K . Soit $r > 0$ dont l'existence est assurée par le lemme 2.10. D'après le lemme 2.9 pour $\epsilon = r$, il y a un nombre fini de points de K tel que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \epsilon).$$

Pour chacune de ces boules, il existe l'un des ouverts O_i qui la contient : pour tout k , il $\varphi(k)$ (on ne demande pas à ce que φ soit une fonction croissante) tel que

$$B(x_k, \epsilon) \subset O_{\varphi(k)}$$

donc

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n O_{\varphi(k)}.$$

■

Lemme 2.11 Un fermé inclus dans un compact est compact.

Démonstration. Soit $x = (x_n, n \geq 0)$ une suite de points d'un fermé F inclus dans un compact K . D'après 2.8, il existe une sous-suite x_ϕ qui converge vers x dans K . Comme F est fermé, il contient toutes ses valeurs d'adhérence donc $x \in F$. On a donc extrait de x une sous-suite qui converge vers un élément de F . ■

Pour le théorème suivant, il nous faut introduire la notion de topologie produit pour une famille d'espaces métriques.

Définition 2.12 Soit $((E_i, d_i), i \geq 1)$ une suite d'espaces métriques. La topologie l'espace produit $\times_{i \geq 1} E_i$ qui est l'ensemble des suites dont la i -ième composante appartient à E_i , est donnée par

la distance

$$d\left((x_i, i \geq 1), (y_i, i \geq 1)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d(x_i, y_i)}{1 + d(x_i, y_i)}.$$

Théorème 2.13 — Théorème de Tychonoff. Un produit cartésien d'un nombre dénombrable d'ensemble compacts est compact pour la topologie produit.

Démonstration. ÉTAPE Pour un nombre fini d'ensembles. Soit E_1, \dots, E_n des espaces métriques et soit K_1, K_2, \dots des compacts dans chacun d'entre eux. On pose $K = K_1 \times \dots \times K_n$. Un élément de K a n composantes. Soit $x = (x_k, k \geq 0)$ une suite d'éléments de K ,

$$x_k = (x_n(1), \dots, x_n(k)).$$

On raisonne par tranche. Soit x^1 la suite des premières composantes

$$x^1 = (x_1(1), x_2(1), \dots).$$

C'est une suite d'éléments de K_1 qui est compact donc on peut en extraire une sous-suite x_{ϕ_1} convergente. On prend ensuite la suite

$$x^2 = (x_{\phi_1(1)}(2), x_{\phi_1(2)}(2)),$$

composée des deuxièmes composantes mais seulement pour les indices de la suite extraite précédemment. On peut aussi extraire une suite convergente de cette suite, x_{ϕ_2} . Comme cette suite est extraite de x_{ϕ_1} , on a $x_{\phi_2(n)}(1)$ et $x_{\phi_2(n)}(2)$ convergentes. On procède ensuite pour les composantes suivantes. Au final, on a bien construit une suite convergeant simultanément pour toutes les composantes donc convergeant dans $E_1 \times \dots \times E_n$.

ÉTAPE Pour un nombre dénombrable d'ensembles. $x = (x_k, k \geq 0)$ une suite d'éléments de K et N tel que

$$\sum_{i \geq N+1} 2^{-i} \leq \epsilon.$$

On continue la construction précédente par récurrence jusqu'à l'infini. Chacune des sous-suites $x_{\phi_n(n)}(i)$ converge vers un élément noté $x(i)$. On a

$$d(x_{\phi_n(n)}, x) \leq \sum_{i=1}^N 2^{-i} \frac{d(x_{\phi_n(n)}(i), x(i))}{1 + d(x_{\phi_n(n)}(i), x(i))} + \epsilon.$$

En choisissant n assez grand, chacun des N premiers termes de la somme peut être rendu plus petit que ϵ donc pour n assez grand,

$$d(x_{\phi_n(n)}, x) \leq N\epsilon + \epsilon,$$

ce qui revient à dire que $x_{\phi_n(n)}$ converge vers x . ■

Définition 2.14 Un ensemble A de l'espace métrique (E, d) est borné si il existe $x \in E$ et $r > 0$ tel que $A \subset B(x, r)$.

Théorème 2.15 Un compact est fermé et borné.

Démonstration.

ÉTAPE Fermé. Soit x une suite de points de K compact qui converge vers p . Toute la question est de savoir si p appartient à K . Or on peut extraire de x une suite convergente x_ϕ dans K vers p_ϕ . Comme la suite globale x converge, $p_\phi = p$ donc p appartient à K .

ÉTAPE Borné. Soit $x \in K$. Si $K \in B(x, 1)$ alors on a fini. Sinon, il existe $x_2 \in B(x, 1)^c$. Si

$$K \subset B(x_1, 1) \cup B(x_2, 1)$$

alors on a fini. Sinon on recommence. Si on peut itérer le procédé un nombre infini de fois alors on a construit une suite de points de K qui sont distants entre eux de plus de 1 :

$$\forall i \neq j, d(x_i, x_j) \geq 1. \quad (2.3)$$

On peut extraire de cette suite une suite convergente puisque K est supposé compact, ce qui est contradictoire avec (2.3). Par conséquent, il existe x_1, \dots, x_n tels que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^n B(x_j, 1).$$

Soit

$$r = \max_{j=2, \dots, n} d(x_j, x_1) + 1.$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\bigcup_{j=1}^n B(x_j, 1) \subset B(x_1, r).$$

L'ensemble K est donc borné. ■

Théorème 2.16 Dans $(\mathbf{R}^n, \ell_\infty)$, les parties compactes sont les ensembles fermés et bornés.

Démonstration. On sait déjà que les compacts sont fermés et bornés. Soit maintenant K fermé et borné dans \mathbf{R}^n . Il existe A tel que

$$K \subset [-A, A]^n.$$

D'après le théorème de Tychonoff, $[-A, A]^n$ est compact et K est fermé dans un compact donc compact. ■

On verra plus tard que la réciproque de cette propriété est vraie pour les espaces vectoriels normés de dimension finie.

Exercice 2.6 On considère $\mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{C})$ muni de la norme

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

On pose

$$f_n(t) = \exp(int).$$

- Calculer $\|f_n\|_2$ et $\|f_n - f_p\|_2$.
- En déduire que la boule unité fermée dans \mathcal{C} pour la norme L^2 n'est pas compacte.

■

Exercice 2.7 Soit $(x_n, n \geq 1)$ une suite convergente dans (E, d) , de limite x . Montrer que

$$K = \{x_n, n \geq 1\} \cup \{x\}$$

est compact

■

Exercice 2.8 Soit $(K_n, n \geq 1)$ une suite décroissante de compacts non vides de (E, N) .

- 1) Montrer que $K = \bigcap_{n \geq 1} K_n$ n'est pas vide.
- 2) Montrer que s'il existe U ouvert contenant K alors à partir d'un certain rang $K_n \subset U$.

■

2.3 Continuité et compacité

Théorème 2.17 Soit (E, d) et (Y, ρ) deux espaces métriques et f continue de E dans Y . L'image d'un compact de E par f est un compact de Y :

$$K \subset E \text{ et } K \text{ compact} \implies f(K) \text{ compact.}$$

Démonstration. Soit $(U_a, a \in \mathcal{C})$ un recouvrement d'ouverts de $f(K)$. Comme f est continue, les $f^{-1}(U_a)$ sont des ouverts de E .

Soit $x \in K$, il existe $a \in \mathcal{C}$ tel que $f(x) \in U_a$ donc $x \in f^{-1}(U_a)$. Ceci signifie que l'ensemble des $f^{-1}(U_a)$ recouvre K . Comme K est compact, on peut en sélectionner un nombre fini et garder la propriété de couverture :

$$K \subset \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(U_j).$$

D'après le point 4. (voir page 20) des propriétés des images directes et réciproques, on en déduit que

$$f(K) \subset \bigcup_{j=1}^n f(f^{-1}(U_j)) \subset \bigcup_{j=1}^n U_j.$$

On a donc bien construit un sous-recouvrement fini d'ouverts de $f(K)$ donc cet ensemble est compact. ■

Ce théorème a une conséquence fondamentale pour tous les problèmes d'optimisation par exemple.

Théorème 2.18 Soit f continue d'un ensemble compact K dans \mathbf{R} . La fonction f est bornée et atteint ses bornes : il existe x_m et x_M tels que

$$f(x_m) = \inf_{y \in K} |f(y)| \text{ et } f(x_M) = \sup_{y \in K} |f(y)|.$$

Démonstration. Comme $f(K)$ est compact, c'est une partie bornée de \mathbf{R} . Soit λ sa borne supérieure. Par définition d'une borne supérieure, il existe une suite $(y_n, n \geq 1)$ de points de $f(K)$ qui convergent vers λ . À chaque indice n , on peut choisir $x_n \in f^{-1}(y_n)$. La suite $(x_n, n \geq 1)$ est une suite du compact K donc admet une sous-suite convergente. Soit x_M la limite de cette sous-suite. Comme f est continue,

$$x_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_M \implies y_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_M).$$

Comme on sait déjà que

$$y_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda,$$

on en déduit que $f(x_M) = \lambda$.

On procède de même pour la borne inférieure. ■

Définition 2.19 Une fonction $f : (E, d) \rightarrow (Y, \rho)$ est uniformément continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que

$$d(x, y) < \delta_\epsilon \implies \rho(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Rappelons que dans la définition de la continuité en un point x , le paramètre δ dépend à la fois de ϵ et de x . Ici, il ne dépend que de ϵ , c'est-à-dire que l'on peut prendre le même pour tous les points x .

Théorème 2.20 — Théorème de Heine. Soit $f : E \rightarrow Y$ continue sur un compact $K \subset E$. La fonction f est uniformément continue sur K .

Démonstration. Si f n'est pas uniformément continue, il existe $\epsilon > 0$ pour lequel pour tout $\delta > 0$, il existe un couple (x_δ, y_δ) de points de K tels que

$$d(x_\delta, y_\delta) < \delta \text{ et } \rho(f(x_\delta), f(y_\delta)) > \epsilon.$$

On prend successivement $\delta = 1, 1/2, \dots, 1/n$, ce qui nous donne l'existence de deux suites $(x_n, n \geq 1)$ et $(y_n, n \geq 1)$ telles que

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ et } \rho(f(x_n), f(y_n)) > \epsilon. \quad (2.4)$$

Comme K est compact, il existe x_ϕ qui converge vers p . D'après l'inégalité triangulaire,

$$d(y_{\phi(n)}, p) \leq d(y_{\phi(n)}, x_{\phi(n)}) + d(x_{\phi(n)}, p).$$

Pour n assez grand, $d(x_{\phi(n)}, p) < \epsilon$ et $1/n \leq \epsilon$ donc

$$d(y_{\phi(n)}, p) \leq 2\epsilon,$$

ce qui signifie que $y_{\phi(n)}$ tend aussi vers p . D'après (2.4) et la caractérisation séquentielle de la continuité,

$$\begin{aligned} \epsilon &< \rho(f(x_{\phi(n)}), f(y_{\phi(n)})) \\ &\leq \rho(f(x_{\phi(n)}), f(p)) + \rho(f(p), f(y_{\phi(n)})) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

On aboutit donc à une contradiction. Par conséquent, f est uniformément continue. ■

Exercice 2.9 Soit K et L deux compacts d'un espace vectoriel normé (E, N) . En utilisant le théorème de Tychonoff, montrer que

$$K + L = \{x + y, x \in K, y \in L\}$$

est compact. ■

Exercice 2.10 Soit K et L deux compacts de (E, N) disjoints. Montrer que

$$d(K, L) := \inf_{x \in K} \inf_{y \in L} N(x - y) > 0$$

■

2.4 Compacité dans l'ensemble des fonctions continues

La compacité est l'un des concepts clés de l'analyse fonctionnelle. En dimension finie, les ensembles compacts sont les fermés bornés mais en dimension infinie, ce n'est plus le cas. Il existe des critères de compacité propres à chaque espace topologique d'usage courant. Nous nous intéressons au cas de l'ensemble des fonctions continues.

Définition 2.21 Soit (E, d) et (Y, ρ) deux espaces métriques et K compact dans E . On note $\mathcal{C}(K; Y)$, l'ensemble des fonctions continues de K dans Y muni de la distance dite infinie :

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in K} \rho(f(x), g(x)).$$

■ **Remarque 2** Si $Y = \mathbf{R}$ alors on prendra pour ρ la distance associée à la norme usuelle sur \mathbf{R} . Dans ces conditions, d_∞ devient une norme et l'on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Définition 2.22 — Equi-continuité. Une famille \mathcal{A} de fonctions continues sur K compact de (E, d) à valeurs dans (Y, ρ) est équi-continue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$d(x, y) < \delta \implies \rho(f(x), f(y)) \leq \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{A}. \quad (2.5)$$

■ **Exemple 2.2** Soit

$$\mathcal{A} = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbf{R}), \|f'\|_\infty \leq M \right\}.$$

L'ensemble \mathcal{A} est équicontinu dans \mathcal{C} . En effet,

$$f(y) = f(x) + \int_x^y f'(z) \, dz$$

donc

$$|f(x) - f(y)| \leq M |y - x|.$$

Par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta = \epsilon/M$ pour que (2.5) soit vérifiée. ■

Définition 2.23 Un ensemble est dit relativement compact si son adhérence est compacte.

Théorème 2.24 Soit (E, d) un espace métrique. Un ensemble $K \subset B$ est relativement compact si de toute suite de points de K , on peut extraire une sous-suite convergent dans E .

Démonstration. ÉTAPE \implies . Comme $K \subset \overline{K} \subset E$, de toute suite de points de K (donc de \overline{K}), on peut extraire une sous-suite convergent dans \overline{K} donc dans E .

ÉTAPE \impliedby . En vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass, il suffit de montrer que de toute suite de \overline{K} on peut extraire une sous-suite convergente (dont la limite est nécessairement dans \overline{K}). Soit $(x_n, n \geq 1)$

On sait déjà que toutes les fonctions continues sur un compact sont uniformément continues donc pour chacune d'entre elles, il existe δ_f tel que $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ dès que $d(x, y) \leq \delta_f$. L'équi-continuité d'une famille de fonctions exige donc que le δ_f puisse être choisi de façon commune à toutes les fonctions, autrement dit que $\sup_{f \in \mathcal{A}} \delta_f < \infty$.

une suite de points de \overline{K} . Pour tout n , il existe $z_n \in K$ tel que

$$d(x_n, z_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Par hypothèse, on peut extraire de la suite $(z_n, n \geq 1)$ une sous-suite $(z_{n_k}, k \geq 1)$ qui converge dans V vers un élément noté $z \in \overline{K}$. Il reste à montrer que x_{n_k} converge vers z . Or,

$$d(x_{n_k}, z) \leq d(x_{n_k}, z_{n_k}) + d(z_{n_k}, z) \leq \frac{1}{n_k} + d(z_{n_k}, z).$$

Pour $\epsilon > 0$ donné, on choisit k tel que

$$\frac{1}{n_k} \leq \epsilon \text{ et } \|z_{n_k} - z\| \leq \epsilon.$$

Il s'ensuit que x_{n_k} tend vers z . ■

Théorème 2.25 — Ascoli-Arzelà. Une famille de fonctions de $\mathcal{C}(K; Y)$ est relativement compacte si et seulement si elle est bornée et équicontinue.

Démonstration. Soit $(f_n, n \geq 1)$ une suite de \mathcal{A} . On doit montrer que l'on peut en extraire une sous-suite convergente.

ÉTAPE 1. Il existe une suite dénombrable d'éléments de K dense dans K . Pour $\epsilon = 1/n$, K est compact donc totalement borné, donc il existe $(x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,k(n)})$ une famille finie telle que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{k(n)} B\left(x_{n,j}, \frac{1}{n}\right).$$

En prenant la réunion de toutes ces familles finies pour $\epsilon = 1, 1/2, 1/3, \dots$, on obtient une famille dénombrable dense dans K . On la note

$$S = (x_1, x_2, \dots).$$

ÉTAPE 2. Cherchons le candidat possible à la limite. La méthode est connue sous le nom de procédé diagonal de Cantor.

La suite $(f_n(x_1), n \geq 1)$ est une suite bornée donc on peut extraire une suite convergente, $(f_{\varphi_1(n)}(x_1), n \geq 1)$.

Supposons que l'on a construit φ_n strictement croissante; avec $\varphi_n(n) \geq n$ et telle que

$$f_{\varphi_n(k)}(x_j) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f_{x_j}, \quad \forall j \leq n.$$

On extrait de la suite $(f_{\varphi_n(k)}(x_{n+1}), k \geq 1)$ une suite convergente donc cela donne naissance à une fonction φ_{n+1} croissante et telle que

$$f_{\varphi_{n+1}(k)}(x_j) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f_{x_j}, \quad \forall j \leq n+1.$$

La suite

$$(g_n = f_{\varphi_n(n)}, n \geq 1)$$

converge pour tous les x_j simultanément vers

$$f : x_j \mapsto f_{x_j}.$$

ÉTAPE 2. On prolonge f par continuité à tout $[0, 1]$. Cette partie de la preuve nécessite un théorème complémentaire que nous verrons au chapitre suivant.

Prouvons d'abord que f est uniformément continue sur S . On a

$$|f(x_j) - f(x_k)| \leq |f(x_j) - g_n(x_j)| + |g_n(x_j) - g_n(x_k)| + |g_n(x_k) - f(x_k)|.$$

Soit $\epsilon > 0$, par l'hypothèse d'équi-continuité, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x_j - x_k| \leq \delta \implies \forall n, |g_n(x_j) - g_n(x_k)| \leq \epsilon.$$

Maintenant, il existe n_j tel que

$$n \geq n_j \implies |f(x_j) - g_n(x_j)| \leq \epsilon$$

et il existe n_k tel que

$$n \geq n_k \implies |f(x_k) - g_n(x_k)| \leq \epsilon.$$

Par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $n_0 = n_k \vee n_j$ tel que

$$|x_j - x_k| \leq \delta \text{ et } n \geq n_0 \implies |f(x_j) - f(x_k)| \leq 3\epsilon.$$

Comme le terme de gauche ne dépend pas de n , on peut l'oublier donc

$$|x_j - x_k| \leq \delta \implies |f(x_j) - f(x_k)| \leq 3\epsilon.$$

Il reste à appliquer le théorème du prolongement de fonctions uniformément continues (voir le théorème 3.11).

ÉTAPE 3. Il reste à montrer que f ainsi définie est la limite uniforme des g_n . On fixe $\epsilon > 0$. Comme f est continue sur un compact, elle est uniformément continue donc il existe $\delta > 0$, indépendant de x , tel que

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon. \quad (2.6)$$

L'ensemble \mathcal{A} est équi-continu donc il existe $\delta' > 0$ tel que

$$|x - y| \leq \delta' \implies \sup_n |g_n(x) - g_n(y)| \leq \epsilon. \quad (2.7)$$

En d'autres termes, on vient de démontrer que $\{g_n, n \geq 1\} \cup \{f\}$ est équi-continu.

Soit $\delta_0 = \min(\delta, \delta')$, soit m tel que $1/m \leq \delta_0$. D'après la construction de S , il existe $k(m)$ et $(x_{m,1}, \dots, x_{m,k(m)})$ tels que tout élément x de K soit à distance inférieure à $1/m$ (donc à δ_0) de l'un de ces points :

$$\forall x \in K, \exists j \in \{1, \dots, k(m)\} \text{ tel que } d(x, x_{m,j}) \leq \epsilon \leq \delta_0.$$

Par ailleurs, pour tout $j \in \{1, \dots, k(m)\}$, il existe m_j tel que

$$n \geq m_j \implies |f(x_{m,j}) - g_n(x_{m,j})| \leq \epsilon,$$

donc

$$n \geq n_0 = \max_{j=1}^{k(m)} m_j \implies |f(x_{m,j}) - g_n(x_{m,j})| \leq \epsilon, \quad \forall j \leq k(m). \quad (2.8)$$

Soit $x \in K$ et $x_{m,j}$ tel que $d(x, x_{m,j}) \leq 1/m$. On a

$$|f(x) - g_n(x)| \leq |f(x) - f(x_{m,j})| + |f(x_{m,j}) - g_n(x_{m,j})| + |g_n(x_{m,j}) - g_n(x)|.$$

On déduit de (2.6), (2.7) et (2.8), qu'il existe m , $x_{m,j}$ et n_0 tel que

$$n \geq n_0 \implies |f(x) - g_n(x)| \leq 3\epsilon.$$

Au final, en oubliant le choix de x_j ,

$$n \geq n_0 \implies |f(x) - g_n(x)| \leq 3\epsilon.$$

ÉTAPE 4. Pour la condition nécessaire. On sait qu'un ensemble compact est borné. D'autre part, un ensemble compact est totalement borné, pour tout $\epsilon > 0$, il existe f_1, \dots, f_p tel que

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{j=1}^p B(f_j, \epsilon). \quad (2.9)$$

Chacune des f_j est uniformément continue donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe δ_j tel que

$$d(x, y) \leq \delta_j \implies |f_j(x) - f_j(y)| \leq \epsilon.$$

En $\delta = \inf_j \delta_j$,

$$d(x, y) \leq \delta \implies |f_j(x) - f_j(y)| \leq \epsilon, \quad \forall j \leq p.$$

Soit $f \in \mathcal{A}$, le recouvrement (2.9) indique qu'il existe f_j à distance inférieure à ϵ de f , i.e. $\|f - f_j\|_\infty \leq \epsilon$.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(y)| + |f_j(y) - f(y)| \\ &\leq 2\|f - f_j\|_\infty + |f_j(x) - f_j(y)|. \end{aligned}$$

Pour $|x - y| \leq \delta$, on a bien

$$|f(x) - f(y)| \leq 3\epsilon$$

donc la partie \mathcal{A} est bien équicontinue. ■

■ **Remarque 3** On a, au passage, redémontré que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue. ■

■ **Exemple 2.3** L'adhérence de l'ensemble

$$B = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R}), \quad \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq M \right\}$$

est compacte dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$. ■

Exercice 2.11 Pour $\alpha \in]0, 1]$, on note $\text{Hol}(\alpha)$ l'ensemble des fonctions Hölder, i.e. les fonctions f continues de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} telles qu'il existe $c_f > 0$ avec

$$|f(t) - f(s)| \leq c_f |t - s|^\alpha, \quad \forall s, t \in [0, 1].$$

- 1) Montrer que $t \mapsto t^\alpha$ appartient à $\text{Hol}(\alpha)$.
- 2) Est-ce que l'application

$$f \mapsto \sup_{s \neq t} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha}$$

est une norme sur $\text{Hol}(\alpha)$? Que faire pour la transformer en une norme?

On pose

$$B_\alpha = \{f \in \text{Hol}(\alpha), \|f\|_{\text{Hol}(\alpha)} \leq 1\}.$$

- 3) Montrer que B_α dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ est relativement compacte.

■ **Exemple 2.4** Cherchons

$$\inf_{f \in \Gamma} \int_{-1}^1 f(t) \, dt \quad (2.10)$$

où

$$\Gamma = \left\{ f \in \mathcal{C}([-1, 1], [0, 1]), f(-1) = f(1) = 1 \right\}.$$

Si l'on prend la suite de fonctions $(t^{2n}, n \geq 1)$, elles appartiennent bien à Γ mais

$$\int_{-1}^1 t^{2n} \, dt = \frac{2}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On en déduit que

$$0 \leq \inf_{f \in \Gamma} \int_{-1}^1 f(t) \, dt \leq \frac{2}{2n+1}$$

donc que

$$\inf_{f \in \Gamma} \int_{-1}^1 f(t) \, dt = 0.$$

S'il existe f continue et positive, d'intégrale nulle alors f est nulle sur $[-1, 1]$ et la fonction nulle n'est pas dans Γ à cause des conditions aux bords. La borne inférieure de (2.10) ne peut pas être atteinte.

Ajoutons alors la condition de Lipschitzianité : on modifie Γ en

$$\begin{aligned} \Gamma_c = \left\{ f \in \mathcal{C}([-1, 1], [0, 1]), f(-1) = f(1) = 1 \right\} \\ \cap \left\{ f, |f(t) - f(s)| \leq c|t - s| \quad \forall s, t \in [-1, 1] \right\}. \end{aligned}$$

Pour $f \in \Gamma_c$, on a immédiatement

$$|f(t)| \leq |f(-1)| + c|t+1| \leq 2c+1$$

donc Γ_c est bien bornée. Elle est évidemment équi-continue. On voit facilement que Γ_c est fermé.

Le théorème d'Arzela-Ascoli garantit alors que Γ_c est compact dans $\mathcal{C}([-1,1]; \mathbf{R})$. L'application

$$\begin{aligned} I^1 : \mathcal{C}([-1,1]; \mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ f &\longmapsto \int_{-1}^1 f(t) \, dt \end{aligned}$$

est linéaire et l'on a

$$|I^1 f| \leq 2 \|f\|_\infty$$

donc elle est continue. En vertu du théorème 2.18, il existe une fonction dans Γ_c pour laquelle le minimum est atteint.

On peut ensuite chercher cette fonction optimale. Puisqu'elle est forcément c -Lipschitz

$$|f(1) - f(t)| \leq c(1-t), \quad \forall t \in [0,1].$$

Par conséquent,

$$f(t) \geq 1 - c(1-t)$$

et comme f est positive,

$$f(t) \geq \max(1 - c(1-t), 0), \quad \forall t \geq 0.$$

De la même manière, on montre que

$$f(t) \geq \max(1 - c(1-|t|), 0), \quad \forall t \leq 0.$$

Soit

$$f_c(t) = \max(1 - c|1-t|, 0), \quad \forall t \in [-1,1].$$

On vérifie que f_c appartient à Γ_c et comme tout f de Γ_c est plus grande que f_c , f_c réalise bien (2.10).

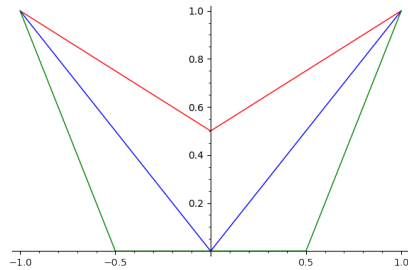


FIGURE 2.2: $f_{0.5}$ en rouge, f_1 en bleu, f_2 en vert

On obtient

$$\inf_{f \in \Gamma_c} \int_{-1}^1 f(t) \, dt = \begin{cases} 2 - c & \text{si } c \leq 1 \\ \frac{1}{c} & \text{si } c \geq 1. \end{cases}$$

■

3

Densité et complétude

Pour prouver qu'une suite converge, il est a priori nécessaire de connaître la limite potentielle, ce qui se révèle souvent impossible. Il existe toutefois un concept qui permet de prouver qu'une suite est convergente sans rien connaître de sa limite, c'est celui de suite de Cauchy. On verra qu'une suite convergente est nécessairement de Cauchy, la réciproque est une propriété de l'espace dans lequel vit la suite considérée. Un tel espace est dit complet, c'est une propriété essentielle pour faire de l'analyse.



FIGURE 3.1: Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857)

3.1 Suite de Cauchy

Définition 3.1 — Suite de Cauchy. Une suite $x = (x_n, n \geq 0)$ d'éléments de (E, d) métrique est dite de Cauchy lorsque pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_ϵ tel que

$$m, n \geq n_\epsilon \implies d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Lemme 3.2 Une suite de Cauchy est bornée.

Lemme 3.3 Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence. Si elle en a au moins une alors elle converge.

Démonstration. ÉTAPE 1. Soit $x = (x_n, n \geq 1)$ une suite de Cauchy. Soit $x_\phi = (x_{\phi(n)}, n \geq 0)$ et $x_\psi = (x_{\psi(n)}, n \geq 0)$ deux sous-suites de x qui convergent respectivement vers p et q . Soit $\epsilon > 0$, d'après l'inégalité triangulaire

$$d(p, q) \leq d(p, x_{\phi(n)}) + d(x_{\phi(n)}, x_{\psi(n)}) + d(x_{\psi(n)}, q).$$

Il existe n_ϕ tel que

$$n \geq n_\phi \implies d(p, x_{\phi(n)}) \leq \epsilon.$$

Il existe n_ψ tel que

$$n \geq n_\psi \implies d(p, x_{\psi(n)}) \leq \epsilon.$$

Comme la suite initiale est de Cauchy, il existe n_ϵ tel que

$$m, n \geq n_\epsilon \implies d(x_{\phi(n)}, x_{\psi(n)}) \leq \epsilon.$$

En combinant les trois dernières inégalités, on obtient

$$n \geq \max(n_\phi, n_\psi, n_\epsilon) \implies d(p, q) \leq 3\epsilon.$$

Comme on peut choisir ϵ aussi petit que l'on veut, on en déduit que $p = q$.

ÉTAPE 2. Soit $(x_{\phi(n)}, n \geq 1)$, une sous-suite qui converge vers un élément $x \in E$. Soit $\epsilon > 0$, il existe n_x tel que

$$n \geq n_x \implies d(x, x_{\phi(n)}) \leq \epsilon.$$

Comme la suite est de Cauchy, il existe n_ϵ tel que

$$n, p \geq n_\epsilon \implies d(x_n, x_p) \leq \epsilon.$$

Par construction, $\phi(n) \geq n$ donc en choisissant $n \geq \max(n_x, n_\epsilon)$,

$$p \geq n_\epsilon \implies d(x_p, x) \leq d(x_p, x_{\phi(n)}) + d(x_{\phi(n)}, x) \leq 2\epsilon.$$

Ce qui signifie que $(x_p, p \geq 1)$ tend vers x . ■

On remarque qu'une suite convergente est nécessairement une suite de Cauchy : soit x_∞ la limite de x , par définition, on sait que pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_ϵ tel que

$$n \geq n_\epsilon \implies d(x_n, x_\infty) < \epsilon.$$

Pour $m \geq n_\epsilon$, on a l'identité

$$d(x_m, x_\infty) < \epsilon.$$

L'inégalité triangulaire implique alors que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_\infty) + d(x_m, x_\infty) < 2\epsilon.$$

Quitte à changer ϵ en $\epsilon/2$, on obtient le résultat voulu.

La réciproque est une propriété topologique de l'espace E .

3.2 Complétude

Définition 3.4 Un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy converge.

Théorème 3.5 Par construction, \mathbf{R} muni de la valeur absolue est un espace vectoriel complet.

■ **Exemple 3.1** L'ensemble des entiers est complet pour la norme induite par la valeur absolue (on se convaincra qu'une suite de Cauchy est constante à partir d'un certain rang). ■

Lemme 3.6 Soit (E, d) un espace métrique complet. Tout ensemble fermé $F \subset E$ est complet pour la distance induite sur F .

Démonstration. Soit x une suite de Cauchy de (F, d) , de par sa définition c'est une suite de Cauchy dans (E, d) donc elle converge dans E pour la distance d . On sait qu'un ensemble fermé contient toutes ses valeurs d'adhérence donc la limite appartient à F . ■

Il y a aussi des contre-exemples

— L'ensemble des rationnels pour la norme induite par la valeur absolue n'est pas complet. Par exemple,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Comme la série converge dans \mathbf{R} , la suite des sommes partielles est de Cauchy mais comme la norme sur \mathbf{Q} est la même que celle de \mathbf{R} , cette suite est aussi de Cauchy dans \mathbf{Q} . Pourtant la limite n'est pas dans \mathbf{Q} . En fait, \mathbf{R} est par construction le complété de \mathbf{Q} .

Définition 3.7 Pour $p \geq 1$, l'espace $\ell^p(\mathbf{N})$ est l'espace des suites de réels telles que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|^p \text{ converge.}$$

On pose

$$\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{1/p}.$$

Théorème 3.8 Pour tout $p \geq 1$, $\ell^p(\mathbf{N})$ est un espace vectoriel normé complet.

Démonstration. On ne va faire la preuve que pour $p = 1$, elle est similaire pour tout $p > 1$.

ÉTAPE 1. Soit x_n une suite de Cauchy dans $\ell^1(\mathbf{N})$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n, m \geq n_0$

$$\|x_n - x_m\|_{\ell^1} = \sum_{k \geq 0} |x_n(k) - x_m(k)| \leq \epsilon.$$

En particulier, pour tout $k \geq 0$,

$$|x_n(k) - x_m(k)| \leq \epsilon,$$

ce qui signifie qu'à indice k fixé, la suite de réels $(x_n(k), n \geq 1)$ est de Cauchy donc converge vers un réel noté $x(k)$. Il reste à démontrer que $x = (x(k), k \geq 0)$ est bien dans $\ell^1(\mathbf{N})$ et que

$$\|x - x_n\|_{\ell^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

ÉTAPE 2. Pour n_0 , la série x_{n_0} est convergente donc il existe K_ϵ tel que

$$\sum_{k \geq K_\epsilon} |x_{n_0}(k)| \leq \epsilon.$$

Pour $n \geq n_0$ et tout $L > K_\epsilon$

$$\begin{aligned} \sum_{k=K_\epsilon}^L |x_n(k)| &\leq \sum_{k=K_\epsilon}^L |x_n(k) - x_{n_0}(k)| + \sum_{k=K_\epsilon}^L |x_{n_0}(k)| \\ &\leq \|x_n - x_{n_0}\|_{\ell^1} + \epsilon \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned} \tag{3.1}$$

En faisant tendre n vers l'infini on obtient

$$\sum_{k=K_\epsilon}^L |x(k)| \leq 2\epsilon. \tag{3.2}$$

En faisant tendre L vers l'infini dans (3.1) et (3.2), on obtient respectivement

$$\begin{aligned} \sum_{k=K_\epsilon}^{\infty} |x_n(k)| &\leq 2\epsilon, \\ \sum_{k=K_\epsilon}^{\infty} |x(k)| &\leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

On remarque alors que

$$\sum_{k \geq 0} |x(k)| \leq \sum_{k=0}^{K_\epsilon-1} |x(k)| + 2\epsilon.$$

La suite des sommes partielles est donc bornée donc la série est convergente, soit $x \in \ell^1$.

ÉTAPE 3. De plus, pour $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_{\ell^1} &\leq \sum_{k=0}^{K_\epsilon-1} |x_n(k) - x(k)| + \sum_{k=K_\epsilon}^{\infty} |x_n(k)| + \sum_{k=K_\epsilon}^{\infty} |x(k)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{K_\epsilon-1} |x_n(k) - x(k)| + 4\epsilon. \end{aligned}$$

Dans la première somme, il y a un nombre fini de termes qui tendent tous vers 0 par la définition des $x(k)$ donc il existe n_1 tel que pour $n \geq n_1$,

$$\sum_{k=0}^{K_\epsilon-1} |x_n(k) - x(k)| \leq \epsilon.$$

Par conséquent, pour $n \geq \max(n_0, n_1)$,

$$\|x_n - x\|_{\ell^1} \leq 5\epsilon$$

donc x_n converge bien vers x . ■

Cette démonstration s'adapte sans trop de difficultés au cas où E est le produit cartésien d'espaces métriques (E_i, d_i) pour la distance

$$d\left((x_i, i \geq 1), (y_i, i \geq 1)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(x_i, y_i).$$

On en déduit le théorème suivant

Théorème 3.9 Le produit cartésien d'un nombre au plus dénombrable d'espaces métriques complets est complet.

Théorème 3.10 Soit (Y, ρ) un espace métrique complet. Soit K un ensemble compact de (E, d) . L'espace $\mathcal{C}(K; Y)$ est complet.

Démonstration. Faisons la preuve dans le cas où $K = [0, 1]$ et $Y = \mathbf{R}$. Le cas général est totalement analogue.

Pour tout $x \in K$, la suite $(f_n(x), n \geq 1)$ est de Cauchy dans \mathbf{R} puisque pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $m, n \geq n_0$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\infty} \leq \epsilon.$$

Par conséquent, $(f_n(x), n \geq 1)$ converge vers un réel noté $f(x)$.

Soit $\epsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} |f(x) - f_n(x)| &= \sup_{x \in K} \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_n(x)| \\ &\leq \sup_{x \in K} \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Or pour $m \geq n \geq n_\epsilon$,

$$\|f_m - f_n\|_{\infty} \leq \epsilon \text{ donc } \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_{\infty} \leq \epsilon.$$

On en déduit que pour $n \geq n_\epsilon$,

$$\sup_{x \in K} |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon,$$

c'est-à-dire que f est bien la limite de f_n pour la norme uniforme : pour $n \geq n_0$,

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \epsilon.$$

La fonction f est donc limite uniforme de fonctions continues donc elle est continue. ■

Montrons maintenant le point manquant de la démonstration du théorème d'Arzela-Ascoli.

Théorème 3.11 Soit (E, d) et (Y, ρ) deux espaces métriques. On suppose que Y est complet. Soit f uniformément continue sur A partie dense de E . Il existe un unique prolongement de f sur E en une fonction continue.

Démonstration. ÉTAPE 1. Soit $(x_n, n \geq 1)$ une suite de points de A convergeant vers $x \in E \setminus A$. La fonction f est supposée uniformément continue sur A donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in A, d(x, y) \leq \delta \implies \rho(f(x), f(y)) \leq \epsilon.$$

Comme x_n converge vers x , cette suite est de Cauchy donc il existe n_0 tel que

$$\forall m, p \geq n_0, d(x_m, x_p) \leq \delta \implies \rho(f(x_m), f(x_p)) < \epsilon.$$

Par conséquent, la suite $(f(x_n), n \geq 1)$ est de Cauchy dans Y donc converge. On peut alors poser

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

ÉTAPE 2. Reste à démontrer que la limite ne dépend pas de la suite approximante choisie. Si $(y_n, n \geq 1)$ est une autre suite de points de A convergeant vers x . La suite

$$z_{2n} = x_n \text{ et } z_{2n+1} = y_n$$

converge vers x donc $(f(z_n), n \geq 1)$ converge disons vers l_z . D'autre part, on a vu que $(f(x_n), n \geq 1)$ et $(f(y_n), n \geq 1)$ convergent respectivement vers l_x et l_y . Comme ce sont des suites extraites de la première on a forcément

$$l_z = l_y = l_x. \quad \blacksquare$$

Il se peut qu'un espace ne soit pas complet d'origine mais on peut toujours le « compléter ».

Théorème 3.12 Soit (E, d) un espace métrique, il existe (\hat{E}, \hat{d}) un espace métrique complet et une injection isométrique j , i.e.

$$d(x, y) = \hat{d}(j(x), j(y)), \forall x, y \in E$$

tels que $j(E)$ soit dense dans \hat{E} .

■ **Exemple 3.2** \mathbf{R} est le complété de \mathbf{Q} . En substance, le complété s'obtient comme toutes « les limites possibles » de suites de Cauchy. ■

Exercice 3.1 Est-ce que l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$ muni de la norme uniforme est complet? ■

Exercice 3.2 Montrer que $\text{Hol}(\alpha)$ muni de la norme

$$\|f\|_{\text{Hol}(\alpha)} = \|f\|_{\infty} + \sup_{s \neq t} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^{\alpha}}$$

est complet. ■

Exercice 3.3 Soit \mathbf{R} muni de la distance

$$d(x, y) = |x^3 - y^3|.$$

1) Montrer que

$$d(x, y) \geq \frac{3}{4}x^2|x - y|$$

2) En déduire que (\mathbf{R}, d) est complet. ■

Exercice 3.4 On munit \mathbf{R} de la distance

$$d(x, y) = |e^x - e^y|$$

1) Montrer que \mathbf{R} muni de cette distance n'est pas complet.

On pourra considérer la suite de terme général $x_n = -n$

2) Montrer que $\bar{\mathbf{R}}$ muni de cette distance est complet. ■

L'une des applications les plus immédiates et pourtant les plus importantes des suites de Cauchy est de prouver l'existence de point fixe.

Définition 3.13 Une fonction $V : (E, d) \rightarrow (F, \rho)$ est lipschitzienne si il existe $c > 0$ tel que

$$\rho(f(x), f(y)) \leq c d(x, y), \forall x, y \in E.$$

Le plus petit c possible est noté $\|f\|_{\text{Lip}}$. On peut aussi le définir par

$$\|f\|_{\text{Lip}} = \sup_{x \neq y} \frac{\rho(f(x), f(y))}{d(x, y)}.$$

La fonction f est dite contractante lorsque

$$\|f\|_{\text{Lip}} < 1.$$

Théorème 3.14 Soit $f : (E, d) \rightarrow (E, d)$ une fonction contractante. Si E est complet alors la fonction f possède un unique point fixe.

Démonstration. On note $\alpha = \|f\|_{\text{Lip}}$.

ÉTAPE Unicité. Si x et x' sont deux points fixes, on a

$$x = f(x) \text{ et } x' = f(x')$$

donc

$$d(x, x') = d(f(x), f(x')) \leq \alpha d(x, x').$$

Le seul nombre positif inférieur à α fois lui même pour $\alpha < 1$ est 0 donc $x = x'$ donc il y a au plus un point fixe.

ÉTAPE Existence. On applique ce qu'il est convenu d'appeler la méthode itérative de Picard. On choisit $x_0 \in E$ et on considère la suite

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

On a

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1})$$

donc par récurrence,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0).$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

donc

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \left(\sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha^k \right) d(x_1, x_0).$$

La série géométrique de raison α converge et $\sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha^k$ est le reste de Cauchy de la suite des sommes partielles donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe

n_ϵ tel que

$$n, n+p \geq n_\epsilon \implies \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha^k < \epsilon.$$

Ceci signifie que $(x_n, n \geq 0)$ est de Cauchy dans E complet donc converge vers une limite que l'on appelle x_∞ . Par la caractérisation séquentielle de la continuité,

$$f(x_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_\infty).$$

D'autre part, $f(x_{n+1}) = x_n$ tend vers x_∞ donc on a bien

$$x_\infty = f(x_\infty).$$

■

Soit à résoudre l'équation différentielle

$$y'(t) = V(y(t)), y(0) = y_0 \quad (3.3)$$

avec V non linéaire mais lipschitzienne :

Théorème 3.15 Si V est lipschitzienne alors il existe une unique solution définie sur tout intervalle borné $[0, T]$.

Démonstration. ÉTAPE 1. On réécrit l'équation différentielle sous la forme dite intégrale : on cherche une fonction $y \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbf{R})$ solution de l'équation

$$y(t) = y_0 + \int_0^t V(y(u)) \, du. \quad (3.4)$$

L'avantage de cette écriture est double. D'une part, on n'a plus besoin de spécifier que y est dérivable, ce sera une conséquence de (3.4). D'autre part, résoudre (3.4) apparaît clairement comme trouver un point fixe pour peu que l'on introduise l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \mathcal{C}([0, T], \mathbf{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}([0, T], \mathbf{R}) \\ f &\longmapsto \left(t \mapsto y_0 + \int_0^t V(f(z)) \, dz \right). \end{aligned}$$

L'équation (3.4) est alors équivalente à trouver $y \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbf{R})$ telle que

$$y = \mathcal{V}(y).$$

ÉTAPE (Digression). Avant de faire la preuve optimale, regardons ce qui se passe si l'on essaye d'appliquer bêtement le théorème de point fixe

La preuve ne marche pas directement sur l'intervalle $[0, +\infty[$, voir par exemple l'équation (3.5) qui ne permet plus de montrer l'équivalence des normes.

dans $(\mathcal{C}([0, T], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Soit L la norme Lipschitzienne de V , on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{V}f(t) - \mathcal{V}g(t)| &= \left| \int_0^t (V(f(s)) - V(g(s))) \, ds \right| \\ &\leq \int_0^t |V(f(s)) - V(g(s))| \, ds \\ &\leq L \int_0^t |f(s) - g(s)| \, ds \\ &\leq L \int_0^t \|f - g\|_\infty \, ds \\ &\leq LT \|f - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Comme le résultat est vrai pour tout $t \in [0, T]$, on obtient

$$\|\mathcal{V}f - \mathcal{V}g\|_\infty \leq LT \|f - g\|_\infty.$$

On ne peut donc appliquer le théorème de point fixe pour conclure qu'à la condition que $LT < 1$. En fait cette méthode ne permet que de définir la solution sur l'intervalle $[0, 1/L[$ et par continuité jusqu'en $1/L$. Après il faut recommencer le raisonnement en prenant comme condition initiale la valeur de la solution ainsi construite en $1/L$, etc.

ÉTAPE 2. On pose $L = \|V\|_{\text{Lip}}$. Sur $\mathcal{C}([0, T])$, on introduit la norme

$$\|f\|_V = \sup_{s \in [0, T]} |f(s)| e^{-Ks}$$

Bien choisir l'espace de fonctions dans lequel on travaille fait partie de la difficulté et de la beauté de l'analyse fonctionnelle.

pour un $K > 0$ que l'on va déterminer après. Comme pour tout $s \in [0, T]$,

$$e^{-KT} \leq e^{-Ks} \leq 1, \quad (3.5)$$

on a

$$e^{-KT} \|f\|_\infty \leq \|f\|_V \leq \|f\|_\infty.$$

Les deux normes sont équivalentes donc $(\mathcal{C}([0, T], \mathbf{R}), \|\cdot\|_V)$ est complet.

ÉTAPE 3. On va montrer que \mathcal{V} est une contraction de $\mathcal{C}([0, T], \mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_V$ si $K > L$.

$$\begin{aligned} |\mathcal{V}f(t) - \mathcal{V}g(t)| &= \left| \int_0^t (V(f(s)) - V(g(s))) \, ds \right| \\ &\leq \int_0^t |V(f(s)) - V(g(s))| \, ds \\ &\leq L \int_0^t |f(s) - g(s)| \, ds \\ &= L \int_0^t |f(s) - g(s)| e^{-Ks} e^{Ks} \, ds \\ &\leq L \|f - g\|_V \int_0^t e^{Ks} \, ds \\ &= \frac{L}{K} \|f - g\|_V (e^{Kt} - 1). \end{aligned}$$

On a donc

$$|\mathcal{V}f(t) - \mathcal{V}g(t)| e^{-Kt} \leq \frac{L}{K} \|f - g\|_V (1 - e^{-Kt}).$$

Donc

$$\|\mathcal{V}f - \mathcal{V}g\|_V \leq \frac{L}{K} \|f - g\|_V.$$

Il suffit de choisir $K > L$ pour obtenir une contraction. ■

3.3 Approximation de fonctions

Quand on ne connaît que des points d'une fonction, c'est-à-dire des couples (x_i, y_i) avec $y_i = f(x_i)$, on peut essayer d'*interpoler* cette fonction : trouver une fonction *simple* qui passe par les points que l'on connaît.

Par fonction simple, on peut envisager les polynômes et donc utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange. Le polynôme de Lagrange (voir figure 3.2) est défini par

$$P(X) = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right) y_i.$$

Il utilise toute l'information donnée mais si jamais on découvre un nouveau point (x_{n+1}, y_{n+1}) , il change complètement d'allure (voir figure 3.3). C'est donc un bon polynôme d'interpolation mais pas un bon polynôme pour l'approximation.

Pour améliorer les choses, il suffit de diviser pour régner en faisant une interpolation plus simple par morceaux. On peut remplacer f par un segment de droite entre deux points (interpolation affine) ou par un trinôme passant par trois points consécutifs (spline).

Au niveau de l'approximation, on peut carrément se contenter par exemple de la droite de régression, c'est-à-dire la droite qui minimise la somme des écarts au carré entre les points données et la droite : il faut trouver a et b qui réalisent

$$\inf_{a,b} \sum_{i=1}^n |y_i - (ax_i + b)|^2.$$

On peut alors se demander s'il est réellement possible de trouver des polynômes proches d'une fonction donnée. La réponse est affirmative et est contenue dans le théorème de Stone-Weierstrass.

Théorème 3.16 — Stone-Weierstrass dans $\mathcal{C}([0,1]; \mathbf{R})$. Toute fonction continue de $[0,1]$ dans \mathbf{R} est limite uniforme d'une suite de polynômes.

La preuve est basée sur les polynômes dits de Bernstein. Rappelons que pour une variable aléatoire Y_n^x de loi binomiale de paramètres n et

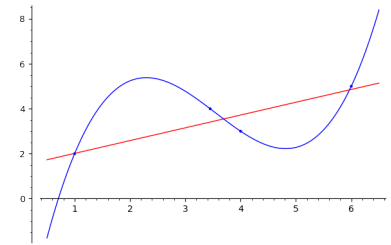


FIGURE 3.2: En bleu, le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par tous les points. En rouge, la droite de régression : la droite la « plus proche » de l'ensemble des points.

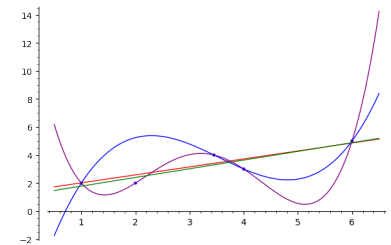


FIGURE 3.3: En rajoutant un point en $(2,2)$, la droite de régression (en vert) ne change quasiment pas tandis que le polynôme d'interpolation (en violet), lui, est complètement modifié. Il n'a donc aucune vertu prédictive.

x , son espérance est donnée par nx et sa variance par $nx(1-x)$. Ceci signifie que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k} = nx \quad (3.6)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x). \quad (3.7)$$

Démonstration. On pose

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

ÉTAPE 1. On remarque d'abord que

$$B_n f(x) = \mathbf{E} \left[f\left(\frac{Y_n^x}{n}\right) \right].$$

D'après la loi faible des grands nombres,

$$\frac{Y_n^x}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} x,$$

autrement dit pour toute fonction continue bornée,

$$\mathbf{E} \left[f\left(\frac{Y_n^x}{n}\right) \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x).$$

La convergence simple de $B_n f$ vers f est donc assurée mais on s'intéresse à la convergence uniforme que l'on ne peut pas avoir comme conséquence d'un théorème de probabilités.

ÉTAPE 2. Comme

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1, \quad (3.8)$$

Notons au passage que (3.8) dit que pour f constante, $B_n(f) = f$. On ne peut pas rêver mieux.

on a

$$\begin{aligned} f(x) - B_n(f)(x) &= f(x) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

On découpe l'ensemble des indices k en deux parties : l'une dans laquelle k/n est proche de x et l'autre où les deux peuvent être éloignés. Soit $\alpha > 0$ et

$$I_\alpha = \{k, |x - \frac{k}{n}| < \alpha\}.$$

Rappelons que f est continue sur un compact donc uniformément continue. On fixe $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Par conséquent, si $k \in I_\delta$,

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \epsilon.$$

Pour la première partie de la somme on a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_\delta} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} &\leq \epsilon \sum_{k \in I_\delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \epsilon \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \epsilon. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pour les indices $k \in I_\delta^c$, on ne peut plus utiliser la continuité uniforme de f , on sait seulement que f est bornée. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_\delta^c} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{k \in I_\delta^c} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= 2\|f\|_\infty \mathbf{P}\left(\left|x - \frac{Y_n^x}{n}\right| \geq \delta\right). \end{aligned}$$

Et, là miracle ! Comme $\mathbf{E}[Y_n^x/n] = x$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebycev stipule que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\left|x - \frac{Y_n^x}{n}\right| \geq \delta\right) &\leq \frac{1}{\delta^2} \text{var}\left(\frac{Y_n^x}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2 \delta^2} n x (1-x) \\ &= \frac{x(1-x)}{n \delta^2}. \end{aligned}$$

Comme $x \in [0, 1]$, la fonction $x(1-x)$ est bornée (précisément par $1/4$ mais la valeur précise n'a pas d'importance) donc

$$\sum_{k \in I_\delta^c} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}. \quad (3.10)$$

En combinant (3.9) et (3.10), on obtient que

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - B_n(f)(x)| \leq \epsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

Il reste à choisir n_0 tel que

$$\frac{\|f\|_\infty}{2n_0\delta^2} \leq \epsilon$$

et le tour est joué. On a bien montré que pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $\|f - B_n(f)\|_\infty < \epsilon$. ■

■ **Remarque 4** Une fonction de $[a, b]$ dans \mathbf{R} se transforme en une fonction de $[0, 1]$ par un changement de variables affine :

$$f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R}) \longmapsto \tilde{f}(x) = f(a + (b - a)x).$$

Donc le même résultat de densité reste valable sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$. ■

Définition 3.17 Soit (K, d) un espace métrique compact et $\mathcal{C}(K, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur K à valeurs réelles. Un sous-ensemble B de $\mathcal{C}(K, \mathbf{R})$ est une sous-algèbre si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- 1) B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(K, \mathbf{R})$ stable par multiplication :

$$f, g \in B \implies fg \in B.$$

- 2) Les fonctions constantes appartiennent à B .

On dit qu'elle est séparante si pour tout $x \neq y \in E$, il existe une fonction $f \in B$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

Théorème 3.18 Soit (K, d) un espace métrique compact et $\mathcal{C}(K, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur K à valeurs réelles. Toute sous-algèbre séparante de $\mathcal{C}(K, \mathbf{R})$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbf{R})$.

Démonstration. Dans ce qui suit, h est une fonction quelconque fixée de $\mathcal{C}(K, \mathbf{R})$.

ÉTAPE (\overline{B} est réticulé). Une fonction $f \in \mathcal{C}(K; \mathbf{R})$ est bornée donc il existe M tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in K$. D'après le théorème 3.16, il existe un polynôme P_M tel que

$$\left| |t| - P_M(t) \right| \leq \frac{1}{M}, \quad \forall t \in [-M, M].$$

Par conséquent, pour tout $x \in K$,

$$\left| |f(x)| - P_M(f(x)) \right| \leq \frac{1}{M}.$$

Du point 1., on déduit que $P_M \circ f$ appartient à B donc $|f|$ appartient à \overline{B} . C'est en fait là que tout se joue. Des formules

$$\begin{aligned} x \wedge y &= \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) \\ x \vee y &= \frac{1}{2}(x + y + |x - y|), \end{aligned}$$

on déduit que si f et g appartiennent à B alors $f \vee g$ et $f \wedge g$ appartiennent à \overline{B} .

ÉTAPE (Fonction interpolante). Soit x, y deux éléments distincts de K . Il existe $g \in B$ telle que $g(x) \neq g(y)$. Pour tout λ, μ dans \mathbf{R} , considérons

la fonction

$$f_{xy} : t \mapsto \mu + (\lambda - \mu) \frac{g(t) - g(y)}{g(x) - g(y)}.$$

Comme B est une algèbre, f_{xy} appartient à B et satisfait

$$f_{xy}(x) = \lambda, f_{xy}(y) = \mu.$$

Pour la suite, on considère les f_{xy} avec $\lambda = h(x)$ et $\mu = h(y)$.

ÉTAPE (Borne supérieure). Soit $\epsilon > 0$ et $x \in K$ fixés. Pour tout $y \in K$, par continuité

$$U(y) = \{u \in K, f_{xy}(u) > h(u) - \epsilon\}$$

est un ouvert non vide puisqu'il contient y . Comme K est compact, il existe m et y_1, \dots, y_m tels que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^m U(y_j).$$

Posons

$$f_x = f_{xy_1} \vee \dots \vee f_{xy_m}.$$

De la première partie de la preuve, on déduit que f_x appartient à \bar{B} . Par construction,

$$f_x(u) > h(u) - \epsilon, \forall u \in K \quad (3.11)$$

et

$$f_x(x) = h(x).$$

ÉTAPE (Borne inférieure). Pour tout $x \in K$, soit

$$V(x) = \{u \in K, f_x(u) < h(u) + \epsilon\}.$$

De même que précédemment, il existe x_1, \dots, x_k tels que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^k V(x_j).$$

On pose alors

$$f = f_{x_1} \wedge \dots \wedge f_{x_k}$$

qui appartient à \bar{B} . En vertu de (3.11), $f_{x_j}(u) > h(u) - \epsilon$, comme on prend le minimum d'une famille finie, on a

$$f(u) > h(u) - \epsilon, \forall u \in K. \quad (3.12)$$

Par ailleurs, par construction de f ,

$$f(u) < h(u) + \epsilon, \forall u \in K. \quad (3.13)$$

On déduit de (3.13) et (3.12) que $\|f - h\|_\infty < \epsilon$ donc que l'on a approché notre fonction h de départ par un élément de \bar{B} à ϵ près. ■

Noter que c'est ici que l'on utilise l'hypothèse que les constantes appartiennent à B , sans quoi on ne pourrait conclure que f_{xy} appartient à B .

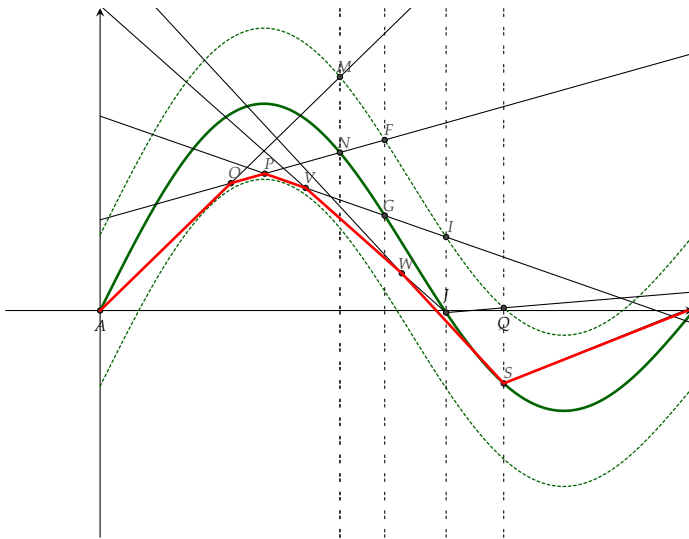


FIGURE 3.4: Les étapes de la construction du théorème de Stone-Weierstrass

Essayons de représenter graphiquement ce qui se passe.

On considère la courbe représentative de h (en vert, traits pleins) sur $[0, \pi]$ et les courbes de $h - \epsilon$ et $h + \epsilon$ en pointillés. Il nous faut construire pour tout x , la fonction f_x . On va le faire en essayant de ne pas avoir trop de points x à considérer, ni trop de points y pour chaque x . On commence tout à gauche en A . On suppose que l'on peut prendre pour g la fonction identité, ce qui revient à dire que f_{xy} est la fonction affine qui passe par $(x, h(x))$ et $(y, h(y))$. On prend pour y , un point tel que la droite $(x_A, y_A) - (y, h(y))$ passe juste au dessus de la courbe de $h - \epsilon$, de sorte que $U_y = [0, \pi]$. Par contre, en le point d'abscisse x_M , $f_{x_A}(x_M) \geq h(x_M) + \epsilon$. On prend f_{x_M} (qui correspond à la droite (ON)) qui rase aussi $h - \epsilon$ de sorte que pour tout y , $f_{x_M}(y) > h - \epsilon$. Cela nous donne un autre point (ici, F) de dépassement de $h + \epsilon$. On construit ensuite f_{x_G} , puis f_{x_J} et f_{x_S} . Là, il y a une petite différence avec les autres cas, on est obligé de faire deux demi-droites, une pour passer au dessus de la bosse de gauche et une autre pour ne pas passer en dessous de $h - \epsilon$. Ensuite on prend le minimum de toutes ces fonctions pour obtenir la courbe en traits pleins rouges et donc l'approximation continue de h .

Définition 3.19 Sur \mathbf{R}^n , on appelle polynôme toute fonction de la forme

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^r \sum_{i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}} a_{i_1, \dots, i_k} x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_n}^{\alpha_n}.$$

Lemme 3.20 L'ensemble des fonctions polynomiales est une algèbre séparante sur \mathbf{R}^n .

Démonstration. Laissée au lecteur. ■

Exercice 3.5 À quoi ressemble le polynôme $x^k(1-x)^{n-k}$ quand n est grand pour k fixé ? ■

Ce théorème a de nombreuses conséquences.

■ **Remarque 5** 1) Si X est un compact de \mathbf{C} , on peut considérer l'ensemble des fonctions polynomiales en z et \bar{z} : puisque

$$x = (z + \bar{z})/2 \text{ et } y = (z - \bar{z})/2i,$$

tout polynôme en x et y s'écrit comme un polynôme en z et \bar{z} .

- 2) Si $X = S^1$, le cercle unité dans \mathbf{C} , on peut prendre des polynômes des variable z et z^{-1} . Il suffit de voir que pour $z \in S^1$, $\bar{z} = z^{-1}$.
- 3) Par conséquent, toute fonction 2π -périodique peut être approchée uniformément par des polynômes trigonométriques :

$$T = \left\{ f : f(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt}, n \geq 1, a_j \in \mathbf{C} \right\}.$$

Considérons

$$C_{2\pi} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{C}); f \text{ } 2\pi\text{-périodique}\}$$

et l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C}(S^1; \mathbf{C}) &\longrightarrow C_{2\pi} \\ f &\longmapsto (t \mapsto f(e^{it})). \end{aligned}$$

L'application Φ est une bijection bicontinue car

$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(e^{it})| = \sup_{x \in S^1} |f(x)|.$$

C'est donc un homéomorphisme. Le résultat découle alors de la remarque précédente. ■

Dans d'autres cas, on a besoin d'approcher une fonction pas forcément continue par une fonction plus régulière, voire infiniment différentiable.

Définition 3.21 Le produit de convolution de deux fonctions f et g définies sur \mathbf{R} est formellement donné par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y)g(x-y) dy.$$

Pour dépasser le stade de la définition formelle, il faut s'assurer que l'intégrale a bien un sens. Il y a de nombreuses possibilités pour cela. Nous ne retiendrons que le cas où f est intégrable sur

\mathbf{R} et g est bornée. On a alors

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{\mathbf{R}} g(y) f(x - y) \, dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(y) g(x - y) \, dy \\ &= (g * f)(x).\end{aligned}$$

Exercice 3.6 Calculer $\mathbf{1}_{[0,1]} * \mathbf{1}_{[0,1]}$. ■

Exercice 3.7 Quel est l'analogue du produit de convolution pour les séries? ■

Exercice 3.8 On suppose f et g intégrables sur \mathbf{R} .

- 1) En utilisant le théorème de Fubini, montrer que $f * g$ est intégrable.

Pour f intégrable, on pose

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{itx} \, dx.$$

- 2) Montrer que

$$\widehat{f * g}(x) = \hat{f}(x) \hat{g}(x).$$

- 3) De quel théorème vue en probabilités discrètes, ce théorème est-il l'analogue? ■

Théorème 3.22 La fonction

$$\rho : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x \longmapsto \rho(x) = \begin{cases} \kappa \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^∞ , à support compact. On choisit κ de sorte que

$$\int_{\mathbf{R}} \rho(x) \, dx = 1.$$

Démonstration. Le seul point délicat à montrer est que la fonction est bien \mathcal{C}^∞ aux points de raccordement -1 et 1 . Cela se fait par récurrence en montrant que la dérivée à droite en -1 , respectivement à gauche en 1 , vaut bien 0 à tout ordre. ■

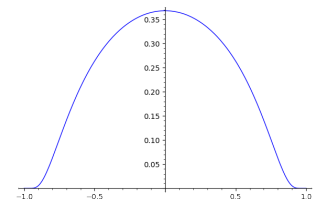


FIGURE 3.5: Représentation de ρ

On considère ensuite la suite de fonctions (voir figure 3.6)

$$\rho_n(x) = n \rho(nx).$$

On remarque

$$\rho_n(x) \neq 0 \iff nx \in [-1, 1] \iff |x| \leq \frac{1}{n}.$$

De plus, le changement de variables $u = nx$ montre que

$$\int_{\mathbf{R}} \rho_n(x) \, dx = 1.$$

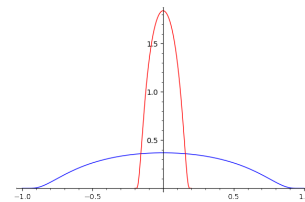


FIGURE 3.6: Représentation de ρ_5 (en rouge). Plus n est grand, plus ρ_n ressemble à un pic émoussé.

Théorème 3.23 Soit f continue et intégrable, la suite de fonctions

$$f_n(x) = (f * \rho_n)(x)$$

est une suite de fonctions \mathcal{C}^∞ qui converge uniformément sur tout compact vers f .

Démonstration. On fixe un compact K de \mathbf{R} . Sur ce compact, f est uniformément continue. Comme l'intégrale de ρ_n est toujours égale à 1, on a

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x) \rho_n(y) \, dy.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq \int_{\mathbf{R}} |f(x) - f(x-y)| \rho_n(y) \, dy \\ &= \int_{-1/n}^{1/n} |f(x) - f(x-y)| \rho_n(y) \, dy. \end{aligned}$$

Pour $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - z| \leq \delta \implies |f(x) - f(z)| < \epsilon.$$

Pour $1/n < \delta$, comme

$$|(x-y) - x| = |y| \leq \frac{1}{n} \leq \delta,$$

on a

$$|f(x) - f(x-y)| \leq \epsilon.$$

Par conséquent, il existe $n_\epsilon = \lceil 1/\delta \rceil + 1$ tel que pour tout $x \in K$, pour tout $n \geq n_\epsilon$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon \int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(y) \, dy = \epsilon.$$

On a donc bien prouvé la convergence uniforme de f_n vers f sur le compact K . ■

Ce théorème n'apporte qu'une chose par rapport à celui Stone-Weierstrass dans le cas où f est continue : la suite de fonctions \mathcal{C}^∞ qui approche f est indépendante du compact sur lequel on travaille. Il est le préliminaire au théorème suivant qui suppose juste que la fonction f est intégrable (voir cours de théorie de la mesure).

Théorème 3.24 Soit f intégrable, la suite de fonctions

$$f_n(x) = f * \rho_n(x)$$

est une suite de fonctions \mathcal{C}^∞ qui converge dans L^1 vers f :

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x) - f_n(x)| \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. ÉTAPE 1. Le théorème de dérivation sous le signe somme donne facilement que f_n est \mathcal{C}^∞ .

ÉTAPE 2. D'après le cours de théorie de la mesure, pour $f \in L^1$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe f_ϵ continue à support compact telle que

$$\|f - f_\epsilon\|_{L^1} \leq \epsilon.$$

ÉTAPE 3. D'après le théorème précédent, $\rho_n * f_\epsilon$ tend uniformément sur tout compact. Or le support de $\rho_n * f_\epsilon$ est inclus dans

$$\text{supp}(f_\epsilon) + [-1/n, 1/n],$$

qui est inclus dans un compact fixe. Par conséquent, $\rho_n * f_\epsilon$ converge uniformément sur \mathbf{R} vers f_ϵ .

ÉTAPE 4. On remarque que pour toute fonction f intégrable

$$\begin{aligned} \|f * \rho_n\|_{L^1} &\leq \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |f(x-y)| \rho_n(y) \, dy \, dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x-y)| \, dx \right) \rho_n(y) \, dy \\ &= \|f\|_{L^1} \int_{\mathbf{R}} \rho_n(y) \, dy \\ &= \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

en raison de l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation.

ÉTAPE 5. On écrit ensuite que

$$\rho_n * f - f = \rho_n * (f - f_\epsilon) + (\rho_n * f_\epsilon - f_\epsilon) + (f_\epsilon - f)$$

d'où il vient que

$$\|\rho_n * f - f\|_{L^1} \leq 2\|f - f_\epsilon\|_{L^1} + \|\rho_n * f_\epsilon - f_\epsilon\|_\infty.$$

f_ϵ étant fixé de sorte que $\|f - f_\epsilon\|_{L^1} \leq \epsilon$, il reste à choisir n assez grand pour rendre la norme infinie plus petite qu' ϵ . ■

On est maintenant en position de montrer le résultat qui sous-tend la théorie des distributions.

Théorème 3.25 Soit U un ouvert quelconque de \mathbf{R} . L'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans U est dense dans $L^1(U)$.

Démonstration. Soit $f \in L^1(U)$ et $\epsilon > 0$, on sait qu'il existe $f \in \mathcal{C}_K(U)$ tel que

$$\|f - f_\epsilon\|_{L^1(U)} \leq \epsilon. \quad (3.14)$$

On étend f_ϵ à tout \mathbf{R} en la prenant nulle sur U^c de sorte que f_ϵ est intégrale sur \mathbf{R} . D'après le théorème précédent,

$$\|\rho_n * f_\epsilon - f_\epsilon\|_{L^1(\mathbf{R})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'autre part,

$$\text{supp}(\rho_n * f_\epsilon) \subset \text{supp } f_\epsilon + B(0, \frac{1}{n}) \subset U,$$

pour n assez grand. On remarquera la petite subtilité due au fait que le support de f_ϵ est un compact dans un ouvert donc « il ne touche pas le bord » fr U ce qui permet de garantir que les raccordements entre les parties nulles et les parties non nécessairement nulles sont de classe \mathcal{C}^∞ .

La restriction de $\rho_n * f_\epsilon$ à U est bien à support compact dans U et

$$\|\rho_n * f_\epsilon|_U - f_\epsilon\|_{L^1(U)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.15)$$

Pour n assez grand, compte-tenu de (3.14) et (3.15), on a bien

$$\|f - \rho_n * f_\epsilon|_U\|_{L^1(U)} \leq 2\epsilon.$$

On a donc approché une fonction de $L^1(U)$ par une fonction de $\mathcal{C}_K^\infty(U)$. ■

4

Espaces de Banach

4.1 Espaces vectoriels normés

Parmi les espaces métriques, il y a ceux qui possèdent en sus de la distance, une structure d'espace vectoriel. Dans ce cas, il est souvent intéressant de considérer les distances définies par des normes.

Définition 4.1 Soit V un espace vectoriel (sur \mathbf{R} ou \mathbf{C}), une norme N_V est une application de V dans \mathbf{R}^+ qui satisfait les propriétés suivantes :

- 1) $N_V(x) = 0 \iff x = 0$
- 2) $N_V(\lambda x) = |\lambda| N_V(x)$
- 3) $N_V(x + y) \leq N_V(x) + N_V(y)$

Dans ces conditions,

$$d_V(x, y) = N_V(x - y)$$

est une distance sur V .

Les distances d_p définies ci-dessus sont en fait issues de norme. L'autre exemple essentiel est celui des fonctions continues sur un ensemble compact.

Définition 4.2 Deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe $0 < c < C$ tels que pour tout $x \in V$,

$$c N_1(x) \leq N_2(x) \leq C N_1(x)$$

4.2 Continuité des applications linéaires

Dans les espaces vectoriels, on est souvent amené à considérer des applications linéaires. La caractérisation de leur continuité est particu-



FIGURE 4.1: Stefan Banach (1892 - 1945)

Il m'arrive assez souvent d'utiliser aussi la notation $\| \cdot \|_V$ pour représenter N_V .

Quand deux normes sont équivalentes, les topologies associées coïncident. En particulier, toute suite convergente pour l'une, l'est automatiquement pour l'autre. Les ouverts (respectivement les fermés) de l'une sont les ouverts (respectivement les fermés) de l'autre, etc.

lièrement simple.

Théorème 4.3 Soit V et W deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de V dans W . La fonction f est continue si et seulement si l'image par f d'une partie bornée de V est une partie bornée de W .

Démonstration. \implies Soit S bornée, il existe $r > 0$ tel que $S \subset B(0, r)$. Si $f(S)$ n'est pas borné alors pour tout $m > 0$, il existe $x_m \in S$ tel que

$$\|f(x_m)\|_W \geq m \text{ donc } \|f(\frac{x_m}{m})\|_W \geq 1.$$

Or

$$\|\frac{x_m}{m}\|_V \leq \frac{r}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

et comme $f(0) = 0$, par continuité de f on a

$$f\left(\frac{x_m}{m}\right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

d'où une contradiction.

\Leftarrow Si f n'est pas continue, il existe une suite $(v_n, n \geq 1)$ qui converge vers v mais telle que $f(v_n)$ ne converge pas vers $f(v)$. Par conséquent, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout n , il existe $m_n \geq n$ tel que

$$\|f(v_{m_n}) - f(v)\|_W \geq \epsilon \implies f\left(\frac{v_{m_n} - v}{\|v_{m_n} - v\|_V}\right) \geq \frac{\epsilon}{\|v_{m_n} - v\|_V}.$$

Comme

$$\frac{v_{m_n} - v}{\|v_{m_n} - v\|_V} \in B(0, 1),$$

et que f envoie tout ensemble borné sur un ensemble borné,

$$\sup_n f\left(\frac{v_{m_n} - v}{\|v_{m_n} - v\|_V}\right) < \infty$$

or

$$\frac{\epsilon}{\|v_{m_n} - v\|_V} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

puisque $v_{m_n} \rightarrow v$, d'où une contradiction. ■

Corollaire 4.4 Soit V et W deux espaces vectoriels normés et $f : V \rightarrow W$ linéaire. La fonction f est continue si et seulement si

$$\|f\|_{\text{op}} \stackrel{\text{not.}}{=} \sup_{0 < N_V(x) \leq 1} \frac{N_W(f(x))}{N_V(x)} = \sup_{N_V(x)=1} N_W(f(x)) < \infty.$$

Les approximations dont on a parlé dans le chapitre précédent servent à faire des raisonnements par densité dont voici un exemple.

Théorème 4.5 Soit $y \in \mathbf{R}$ et τ_y l'application définie par

$$\begin{aligned}\tau_y : L^1 &\longrightarrow L^1 \\ f &\longmapsto (x \mapsto f(x - y))\end{aligned}$$

est continue. Par ailleurs, pour $f \in L^1$ fixée, l'application

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &\longrightarrow L^1 \\ y &\longmapsto \tau_y f\end{aligned}$$

est continue.

Démonstration. ÉTAPE 1. Montrons d'abord que $\tau_y f$ est intégrable. On doit montrer que

$$\int |f(x - y)| \, dx < \infty.$$

Or d'après le changement de variables $u = x - y$, on a

$$\int |f(x - y)| \, dx = \int_{\mathbf{R}} |f(u)| \, du$$

dont on sait que c'est fini puisque f appartient à L^1 . On en déduit aussi que

$$\|\tau_y f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$$

donc pour tout $y \in \mathbf{R}$, τ_y est continue de L^1 dans L^1 .

ÉTAPE 2. Là, l'application n'est plus linéaire donc on revient à la définition classique de la continuité. On doit montrer que

$$\|\tau_y f - \tau_{y_0} f\|_{L^1} = \int_{\mathbf{R}} |f(x - y) - f(x - y_0)| \, dx \xrightarrow{y \rightarrow y_0} 0.$$

On remarque d'abord que par changement de variables,

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x - y) - f(x - y_0)| \, dx = \int_{\mathbf{R}} |f(x - (y - y_0)) - f(x)| \, dx$$

donc il suffit de montrer la continuité en $y = 0$.

ÉTAPE 3. On fixe $\epsilon > 0$ et on considère f_ϵ continue à support compact telle que

$$\|f - f_\epsilon\|_{L^1} \leq \epsilon.$$

On écrit ensuite

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} |f(x - y) - f(x)| \, dx &\leq \int_{\mathbf{R}} |f(x - y) - f_\epsilon(x - y)| \, dx \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}} |f_\epsilon(x - y) - f_\epsilon(x)| \, dx + \int_{\mathbf{R}} |f_\epsilon(x) - f(x)| \, dx \\ &= 2\|f - f_\epsilon\|_{L^1} + \int_{\mathbf{R}} |f_\epsilon(x - y) - f_\epsilon(x)| \, dx.\end{aligned}$$

Comme on cherche la limite en $y = 0$, on peut toujours se restreindre à $|y| \leq 1$. Dans ce cas, on peut restreindre la dernière intégrale au

compact $(\text{supp } f_\epsilon + [-1, 1])$ au lieu de \mathbf{R} . Comme f_ϵ est continue sur ce compact, elle y est uniformément continue. Soit $\delta > 0$ tel que

$$|x - z| \leq \delta \implies |f_\epsilon(x) - f_\epsilon(z)| \leq \epsilon.$$

On a donc

$$\begin{aligned} |x - z| \leq \delta \\ \implies \int_{\mathbf{R}} |f(x - y) - f(x)| \, dx \leq (2 + \text{longueur}(\text{supp } f_\epsilon + [-1, 1])) \epsilon. \end{aligned}$$

La continuité en découle. ■

Choisissons la fonction

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbf{1}_{]0,1]}(x)$$

qui appartient à L^1 . Le résultat précédent implique que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{x-y}} \mathbf{1}_{]y,y+1]}(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbf{1}_{]0,1]}(x) \right| \, dx = 0,$$

ce qui n'a rien d'évident si l'on essaye de le montrer directement.

Théorème de l'image ouverte et conséquences

En dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues puisque

$$\begin{aligned} N_W(f(x) - f(y)) &= N_W(f(x - y)) \\ &= N_W\left(\sum_{i=1}^N (x_i - y_i) f(e_i)\right) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^N N_W(f(e_i))\right) \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, une application linéaire inversible admet un inverse continu. En dimension infinie, le résultat reste vrai mais la preuve en est nettement plus sophistiquée puisqu'elle repose sur le lemme de Baire.

Théorème 4.6 — Image ouverte. Soit f une application linéaire continue surjective d'un Banach V dans un Banach W . L'application f envoie les ouverts de V sur des ouverts de W .

Corollaire 4.7 — Théorème d'isomorphisme de Banach. Soit V et W deux espaces de Banach. Si $f : V \rightarrow W$ est linéaire, continue et bijective, son inverse est continu.

Démonstration. Comme f est bijective, pour U ouvert de W ,

$$(f^{-1})^{-1}(U) = f(U),$$

qui est un ouvert de V d'après le théorème de l'image ouverte. ■

Corollaire 4.8 Soit V un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2 . On suppose que

- 1) Les deux espaces (V, N_1) et (V, N_2) sont des espaces de Banach
- 2) Il existe $c > 0$ tel que

$$N_2(x) \leq c N_1(x), \quad \forall x \in V. \quad (4.1)$$

Alors il existe $c' > 0$ tel que

$$N_1(x) \leq c' N_2(x), \quad \forall x \in V.$$

Les deux normes sont donc équivalentes.

Démonstration. L'identité de (V, N_1) dans (V, N_2) est évidemment linéaire et bijective. L'équation (4.1) revient à dire qu'elle est continue donc le théorème 4.6 assure que son inverse, c'est-à-dire elle-même, est continue de (V, N_2) dans (V, N_1) . ■

On peut en déduire une nouvelle caractérisation des fonctions continues.

Définition 4.9 Soit $T : V \rightarrow W$ deux espaces vectoriels. Le graphe de T , noté $G(T)$, est défini par

$$G(T) = \{(x, T(x)), x \in V\} \subset V \times W.$$

L'espace $V \times W$ peut être muni de la norme

$$N((x, y)) = N_V(x) + N_W(y)$$

ou de n'importe quelle norme de la forme

$$N_{\mathbf{R}^2}(N_V(x), N_W(y))$$

où $N_{\mathbf{R}^2}$ est n'importe quelle norme sur \mathbf{R}^2 .

Théorème 4.10 Soit V et W deux espaces de Banach et T linéaire de V dans W . L'application T est continue si et seulement si $G(T)$ est fermé dans $V \times W$.

Démonstration.

ÉTAPE \implies . L'application

$$\begin{aligned}\theta : V \times W &\longrightarrow W \\ (x, y) &\longmapsto y - T(x)\end{aligned}$$

est continue puisque T l'est :

$$N_W(y - T(x)) \leq N_W(y) + N_W(T(x)) \leq N_W(y) + \|T\| N_V(x).$$

Comme

$$G(T) = \theta^{-1}(\{0_W\}),$$

$G(T)$ est bien fermé.

ÉTAPE \longleftarrow . On considère sur V les deux normes

$$N_1(x) = N_V(x) + N_W(T(x)) \text{ et } N_2(x) = N_V(x).$$

On veut montrer que (V, N_1) est un espace de Banach, ce qui nous permettra de conclure par le corollaire 4.8. Une suite de (V, N_1) qui est de Cauchy l'est aussi pour (V, N_V) donc elle converge, i.e. il existe $x \in V$ tel que

$$N_V(x_n - x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

La suite des $T(x_n)$ est aussi de Cauchy dans W donc elle converge vers un certain η . Reste à savoir si $\eta = T(x)$ ou de façon équivalente si (x, η) appartient à $G(T)$. Or, la suite de points $\{(x_n, T(x_n)), n \geq 1\}$ appartient à $G(T)$ et converge vers (x, η) dans $V \times W$. Comme $G(T)$ est fermé, le couple (x, η) appartient au graphe donc $\eta = T(x)$. Par conséquent, la suite $(x_n, n \geq 1)$ converge dans V pour N_1 donc (V, N_1) est un Banach. Comme on a de manière évidente

$$N_2(x) \leq N_1(x),$$

le corollaire 4.8 implique qu'il existe $c' > 0$ tel que

$$N_1(x) \leq c' N_2(x) \implies N_W(T(x)) \leq c' N_V(x).$$

Ce qui est bien la caractérisation de la continuité de T . ■

4.3 Compacité

Le résultat principal de cette section est le théorème de Riesz qui lie un résultat topologique (la compacité) à une caractéristique algébrique (la dimension).

Théorème 4.11 — Théorème de Riesz. Soit (V, N_V) un espace de Banach. Sa boule unité fermée est compacte si et seulement si V est de dimension finie.

On a besoin de deux lemmes préparatoires.

Lemme 4.12 Soit (V, N_V) un espace vectoriel normé et M un sous-espace vectoriel fermé. Si $M \neq V$, pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, il existe $x_\epsilon \in V$ tel que

$$N_V(x_\epsilon) = 1 \text{ et } d(x_\epsilon, M) \geq 1 - \epsilon.$$

Démonstration. Soit $y \in V \setminus M$. Comme M est fermé

$$\alpha \stackrel{\text{not.}}{=} d(y, M) > 0.$$

Fixons $\epsilon \in]0, 1[$, il existe $m_\epsilon \in M$ tel que

$$N_V(y - m_\epsilon) \leq \alpha \left(1 + \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \right).$$

L'expression précise du terme de droite n'a pas vraiment d'importance, il faut juste que ce soit un terme strictement plus grand qu' α et qui tende vers α quand ϵ tend vers 0. Le choix fait ici est juste à visée esthétique pour tomber pile poil sur la quantité $1 - \epsilon$ de l'énoncé du lemme.

On pose

$$x_\epsilon = \frac{y - m_\epsilon}{N_V(y - m_\epsilon)}$$

qui est évidemment de norme 1. Reste à vérifier qu'il satisfait la propriété désirée. Soit $m \in M$,

$$\begin{aligned} N_V(x_\epsilon - m) &= N_V\left(\frac{y - m_\epsilon}{N_V(y - m_\epsilon)} - m\right) \\ &= N_V(y - m_\epsilon)^{-1} N_V(y - (m_\epsilon + N_V(y - m_\epsilon)m)) \\ &\geq N_V(y - m_\epsilon)^{-1} d(y, M) \end{aligned} \tag{4.2}$$

puisque $m_\epsilon + N_V(y - m_\epsilon)m$ appartient à l'espace vectoriel M . Par conséquent, (4.2) implique

$$N_V(x_\epsilon - m) \geq N_V(y - m_\epsilon)^{-1} \alpha \geq \left(\frac{1}{1 - \epsilon} \right)^{-1} = 1 - \epsilon.$$

■

Le preuve du corollaire est laissée au lecteur.

Corollaire 4.13 On suppose qu'il existe une suite d'espaces fermés $(M_n, n \geq 1)$ tels que

$$M_n \subset M_{n+1} \text{ et } M_n \neq M_{n+1}.$$

Il existe une suite $(y_n, n \geq 1)$ telle que

$$y_n \in M_n, N_V(y_n) = 1 \text{ et } d(y_{n+1}, M_n) \geq \frac{1}{2}.$$

Preuve du théorème 4.11. ÉTAPE \Leftarrow . Soit x_1, \dots, x_N une base de V . L'application

$$\begin{aligned} \theta : (\mathbf{R}^N, \ell^\infty) &\longrightarrow V \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_N) &\longmapsto \sum_{j=1}^N \alpha_j x_j \end{aligned} \quad (4.3)$$

est bijective, continue puisque

$$N_V\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^N |\alpha_j| N_V(x_j) \leq \left(\sum_{j=1}^N N_V(x_j)\right) \|\alpha\|_{\ell^\infty}. \quad (4.4)$$

Son inverse est donc aussi continue. Posons $\gamma = \|\theta^{-1}\|_{\text{op}}$. On a par définition de la norme

$$\|\theta^{-1}(y)\|_\infty \leq \gamma N_V(y), \quad \forall y \in V.$$

Soit $(y_k, k \geq 1)$ une suite de points de $B_V(0, 1)$, la suite $(\theta^{-1}(y_k), k \geq 1)$ est une suite de points du compact $B_{\mathbf{R}^N}(0, \gamma) = [-\gamma, \gamma]^N$ donc on peut en extraire une sous-suite qui converge. Par continuité de θ , l'image de cette suite par θ est une sous-suite convergente de $B_V(0, 1)$, qui est donc compact.

ÉTAPE \Rightarrow . Si V n'est pas de dimension finie, on peut trouver une famille dénombrable libre $(x_n, n \geq 1)$ de V . On pose alors

$$M_n = \text{Vect}\{x_j, j = 1, \dots, n\}.$$

En vertu du corollaire 4.13, il existe une suite $(y_n, n \geq 1)$ telle que

$$N_V(y_n) = 1 \text{ et } N_V(y_m - y_n) \geq \frac{1}{2} \text{ pour } m > n.$$

On ne peut pas extraire de sous-suite convergente de cette suite donc la boule unité n'est pas compacte. ■

En dimension finie, le résultat fondamental est que toutes les normes sont équivalentes.

Théorème 4.14 Soit V un espace vectoriel de dimension finie N et soit θ l'application définie dans (4.3). Il existe $0 < \delta \leq \Delta$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}^N$,

$$\delta \|x\|_\infty \leq N(\theta(x)) \leq \Delta \|x\|_\infty.$$

Démonstration. La boule unité de $(\mathbf{R}^N, \ell^\infty)$ est l'ensemble $[-1, 1]^N$ dont on sait qu'il est compact (d'après le théorème de Riesz ou celui de Tychonoff). On a vu dans (4.4) que θ est continue donc elle atteint ses extréma. Soit δ et Δ défini par

$$\delta = \inf \left\{ \theta(x), \|x\|_\infty(x) = 1 \right\} > 0 \text{ et } \Delta = \sup \left\{ \theta(x), \|x\|_\infty = 1 \right\} > 0.$$

Il vient pour tout x de norme 1 :

$$\delta \leq N(\theta(x)) \leq \Delta.$$

Pour $x \neq 0_{\mathbf{R}^N}$, $x/\|x\|_\infty$ est de norme 1 et comme θ est linéaire

$$\theta \left(\frac{x}{\|x\|_\infty} \right) = \frac{1}{\|x\|_\infty} \theta(x).$$

Par conséquent, pour tout $x \neq 0$,

$$\delta \|x\|_\infty \leq N(\theta(x)) \leq \Delta \|x\|_\infty$$

et comme $\theta(0_{\mathbf{R}^n}) = 0$, cette égalité est vraie pour tout $x \in \mathbf{R}^N$. ■

Corollaire 4.15 Soit N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel de dimension finie. Les deux normes sont équivalentes.

Démonstration. Le théorème 4.14 stipule l'existence de δ_i, Δ_i tels que pour $i = 1, 2$ et pour tout $v \in V$,

$$\delta_i N_\infty(\theta^{-1}(v)) \leq N_i(v) \leq \Delta_i N_\infty(\theta^{-1}(v))$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} N_1(v) &\leq \Delta_1 N_\infty(\theta^{-1}(v)) \\ &\leq \frac{\Delta_1}{\delta_2} N_2(v). \end{aligned}$$

De la même manière,

$$N_2(v) \leq \frac{\Delta_2}{\delta_1} N_1(v).$$

On a donc bien montré l'équivalence. ■

En dimension infinie, il n'y a aucune raison pour que deux normes soient équivalentes. Prenons V , l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$, muni de la norme infinie et de la norme L^1 . La suite de fonctions $(x \mapsto x^n, n \geq 1)$. On a

$$\|x^n\|_{L^1} = \frac{1}{n+1} \text{ et } \|x^n\|_{\infty} = 1.$$

Il n'existe donc pas de constante universelle telle que

$$\|f\|_{\infty} \leq c \|f\|_{L^1}, \forall f \in V.$$

On a par contre

$$\|f\|_{L^1} \leq \|f\|_{\infty}.$$

Corollaire 4.16 Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées bornées.

Démonstration. ÉTAPE 1. On sait que les compacts de V sont fermés et bornés.

ÉTAPE 2. Soit maintenant, $K \subset V$ fermé, borné. On reprend la fonction θ du théorème 4.14. On sait que θ est bijective, linéaire et continue ainsi que son inverse. En tant qu'image inverse d'un fermé par une application continue, $\theta^{-1}(K)$ est fermé dans $(\mathbf{R}^n, \ell^{\infty})$.

En tant qu'image directe d'un borné par une application linéaire continue, $\theta^{-1}(K)$ est borné dans $(\mathbf{R}^n, \ell^{\infty})$. Les projections de $\theta^{-1}(K)$ sur chacune des composantes sont fermées bornées dans \mathbf{R} . Le théorème de Bolzano-Weierstrass dit alors que ce sont des compacts. Comme le produit cartésien de compacts est compact, on en déduit que $\theta^{-1}(K)$ est compact.

ÉTAPE 3. Enfin comme

$$K = \theta\left(\theta^{-1}(K)\right),$$

K apparaît comme l'image d'un compact par une application continue donc K est compact. ■

En résumé, en dimension infinie, la boule unité fermée n'est pas compacte et les normes ne sont pas nécessairement équivalentes. Les critères de compacité dans les espaces de dimension infinie, tels que le théorème d'Arzela-Ascoli, sont donc de précieux outils.

5

Séparation et optimisation

5.1 Formes linéaires et espace dual

Définition 5.1 Soit E un espace vectoriel normé, une *forme* linéaire est une application linéaire de E dans \mathbf{R} . L'ensemble de ces formes s'appelle le dual algébrique de E , on le note $\mathcal{L}(E, \mathbf{R})$.

■ **Exemple 5.1** Dans un espace de dimension finie, disons \mathbf{R}^n , une forme linéaire est complètement déterminée par son action sur une base $(e_i, 1 \leq i \leq n)$: si l'on pose

$$f_i = f(e_i)$$

alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n f_i x_i. \quad (5.1)$$

On peut construire l'application linéaire

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ f &\longmapsto (f(e_i), 1 \leq i \leq n). \end{aligned}$$

De (5.1), on déduit que θ est injective et surjective donc bijective donc l'ensemble des formes linéaires sur E de dimension n est un espace vectoriel de même dimension.

Une manière de distinguer \mathbf{R}^n et son dual algébrique est de considérer que les éléments de \mathbf{R}^n sont des vecteurs colonnes tandis que ceux de son dual sont des vecteurs lignes de sorte que l'on a bien

$$(x'_1, \dots, x'_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x'_i x_i = x'(x).$$



FIGURE 5.1: Hans Hahn (1879 - 1934)

■

Définition 5.2 — Dual topologique. Soit (E, N) un espace vectoriel normé, E' son dual topologique est l'ensemble des formes linéaires *continues* (d'où l'aspect topologique) définies sur E .

E' est un espace vectoriel que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|. \quad (5.2)$$

Théorème 5.3 Le dual d'un espace de Banach est un espace de Banach (pour la norme définie en (5.2)).

Démonstration. Soit $(x'_n, n \geq 1)$ une suite de Cauchy de points de E' : pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_ϵ tel que $n, m \geq n_\epsilon$ implique

$$\|x'_n - x'_m\|_{E'} \leq \epsilon,$$

ce qui implique que

$$\forall x \in E, |x'_n(x) - x'_m(x)| \leq \|x\|_E \epsilon. \quad (5.3)$$

Par conséquent, la suite de réels $(x'_n(x), n \geq 1)$ est de Cauchy dans \mathbf{R} donc converge vers $x'_x \in \mathbf{R}$. Comme

$$x'_n(\lambda x + y) = \lambda x'_n(x) + x'_n(y),$$

il vient, en passant à la limite, que

$$x'_{\lambda x + y} = \lambda x'_x + x'_y.$$

L'application qui à x associe x'_x est donc linéaire, on définit la forme linéaire x' par

$$x'(x) = x'_x.$$

Il reste à montrer que

$$\sup_{\|x\|_E=1} |x'_n(x) - x'(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En faisant tendre m vers l'infini dans (5.3), on a

$$n \geq n_\epsilon \implies \forall x \in E, |x'_n(x) - x'(x)| \leq \|x\|_E \epsilon,$$

soit de manière équivalente

$$n \geq n_\epsilon \implies \|x'_n - x'\|_{E'} \leq \epsilon,$$

d'où la convergence. ■

On notera généralement

$$f(x) = \langle f, x \rangle_{E', E}$$

que l'on appellera le $\langle x', x \rangle_{E', E}$ de dualité et on remarque que l'on doit avoir

$$|\langle f, x \rangle_{E', E}| \leq \|f\|_{E'} \|x\|_E. \quad (5.4)$$

■ **Exemple 5.2** Notons $(e'_i, 1 \leq i \leq n)$ la base duale de $(e_i, 1 \leq i \leq n)$, c'est-à-dire la famille de formes linéaires définies par

$$\langle e'_i, e_j \rangle_{E', E} = \mathbf{1}_j(i).$$

Si l'on met sur \mathbf{R}^n la norme ℓ^1 :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

alors

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n x'_i e'_i \right\|_{E'} &= \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n x'_i x_i \right| \\ &\leq \|x'\|_\infty \|x\|_1 \\ &\leq \|x'\|_\infty \end{aligned}$$

où

$$\|x'\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x'_i|.$$

On en déduit que

$$\|x'\|_{E'} \leq \|x'\|_\infty.$$

Soit i_0 tel que

$$|x'_{i_0}| = \max_{i=1, \dots, n} |x'_i|$$

et $x = \text{signe}(x'_{i_0}) e_{i_0}$. On a

$$\|x\|_1 = 1 \text{ et } \langle x', x \rangle_{E', E} = |x'_{i_0}| = \|x'\|_\infty.$$

Ceci signifie que le sup dans la définition de la norme sur E' est atteint et que $\|x'\|_{E'} = \|x'\|_\infty$. En conclusion, l'application

$$\begin{aligned} (E', N_{E'}) &\longrightarrow (\mathbf{R}^n, \ell^\infty) \\ \sum x'_i e'_i &\longmapsto (x'_1, \dots, x'_n) \end{aligned}$$

est linéaire, bijective et isométrique; c'est ce que l'on appelle une *isométrie bijective*.

Deux espaces vectoriels qui sont en relation par une telle application ont les mêmes propriétés tant algébriques que topologiques, en conséquence, on identifie souvent de tels espaces. Le dual topologique de (\mathbf{R}^n, ℓ^1) est donc identifiable à $(\mathbf{R}^n, \ell^\infty)$. ■

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Cette écriture est justifiée par la ressemblance avec celle d'un produit scalaire. On verra dans le chapitre sur les espaces de Hilbert, qu'un espace de Hilbert est isométriquement isomorphe à son dual donc lui est identifiable et alors crochet de dualité et produit scalaire coïncident.

Théorème 5.4 Soit (E, \mathcal{E}, μ) un espace mesuré et $L^p(E, \mu)$ l'espace des fonctions de puissance p -ième μ -intégrable.

Soit q défini par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Pour $1 \leq p < \infty$, le dual de $L^p(\mu)$ est isométriquement isomorphe à $L^q(\mu)$. En revanche, le dual de $L^\infty(\mu)$ est plus grand que $L^1(\mu)$. Le crochet de dualité est défini par

$$\langle f, g \rangle = \int fg \, d\mu.$$

Remarquons que pour μ la mesure de comptage sur \mathbf{N} , on obtient que

$$\ell^p(\mathbf{N}) = \left\{ u, \sum_{n \geq 0} |u_n|^p < \infty \right\}$$

est en dualité avec $\ell^q(\mathbf{N})$: toute forme linéaire continue sur $\ell^p(\mathbf{N})$ est représentable par une suite $v \in \ell^q(\mathbf{N})$ et le crochet de dualité est donné par

$$\langle v, u \rangle_{\ell^q, \ell^p} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n u_n.$$

De plus,

$$\sup_{\|u\|_{\ell^p}=1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} v_n u_n \right| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^q \right)^{1/q} = \|v\|_{\ell^q} \quad (5.5)$$

On retrouve bien l'extension du résultat que l'on a vu plus haut pour la dimension finie.

Exercice 5.1 Soit $\alpha \in \mathbf{R}^*$ et pour $p \geq 1$

$$H^{\alpha, p} = \left\{ u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}, \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p n^{p\alpha} < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\alpha, p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p n^{p\alpha} \right)^{1/p}.$$

- 1) Montrer que $H^{\alpha, p}$ est un espace de Banach.
- 2) Quel est son dual topologique ?

■

Il se trouve que l'on connaît aussi le dual de l'ensemble des fonctions continues.

Définition 5.5 Sur (E, \mathcal{E}) un espace muni d'une tribu, une mesure signée finie μ est la différence de deux mesures positives finies

(celles dont vous avez l'habitude), notées μ^+ et μ^- , dans le sens où :

- Il existe P et N deux éléments de \mathcal{E} tels que $P \cap N = \emptyset$ et $P \cup N = E$,
- Pour tout ensemble $A \in \mathcal{E}$,

$$\mu(A) = \mu^+(A \cap P) - \mu^-(A \cap N).$$

On a alors le théorème de Riesz suivant :

Théorème 5.6 — Théorème de Riesz. Soit K compact de \mathbf{R}^n et $\mathcal{C}(K, \mathbf{R})$, l'ensemble des fonctions continues sur K à valeurs dans \mathbf{R} . Le dual topologique de cet espace est l'ensemble des mesures signées finies sur K : pour toute forme linéaire L , continue sur $\mathcal{C}(K, \mathbf{R})$, il existe une (unique) mesure signée finie μ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}(K, \mathbf{R})$,

$$L(f) = \int_K f \, d\mu = \int_K f \, d\mu^+ - \int_K f \, d\mu^-.$$

■ **Exemple 5.3** L'exemple le plus simple d'une telle forme linéaire est la masse de Dirac en un point $a \in E$. L'application

$$\begin{aligned} \varepsilon_a : \mathcal{C}(K; \mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ f &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

est linéaire et continue puisque

$$|f(a)| \leq \|f\|_\infty.$$

La mesure δ_a est définie par

$$\int f \, d\delta_a = f(a)$$

■

Exercice 5.2 On considère l'espace $\text{Hol}_0(\alpha)$ des fonctions α -Hölder sur $[0, 1]$, nulles en 0, muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{s \neq t} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha}.$$

Soit $a \in]0, 1]$.

- 1) Montrer que ε_a appartient au dual de $\text{Hol}_0(\alpha)$.
 - 2) Calculer sa norme.
- On montrera que $t \mapsto t^\alpha$ est dans $\text{Hol}_0(\alpha)$.

■

Exercice 5.3 On considère c_0 l'ensemble des suites de nombres réels qui tendent vers 0 muni de la norme infinie :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |u_n|.$$

On considère l'application

$$\begin{aligned} T : c_0 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ u &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} u_n. \end{aligned}$$

- 1) Montrer que $T \in c'_0$ et calculer $\|T\|_{c'_0}$.
- 2) Existe-il u telle que $\|u\|_\infty = 1$ et $T(u) = \|T\|_{c'_0}$?

Après cette digression sur les espaces duals, revenons à nos moutons sur la séparation. Dans \mathbf{R}^2 , une forme linéaire f est donc identifiée par un vecteur $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et

$$\langle (a, b), (x, y) \rangle_{\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2} = ax + by.$$

Par conséquent, on a

$$\ker f = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2, ax + by = 0 \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}^\perp.$$

Géométriquement, le noyau de f est donc une droite vectorielle.

Dans \mathbf{R}^3 , il faut trois réels (a, b, c) pour caractériser une forme linéaire, le noyau correspondant est donné par l'équation

$$(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, ax + by + cz = 0.$$

C'est l'équation d'un plan dans \mathbf{R}^3 . Plus généralement, en dimension n , le noyau d'une forme linéaire est de dimension $n - 1$, c'est un *hyperplan*.

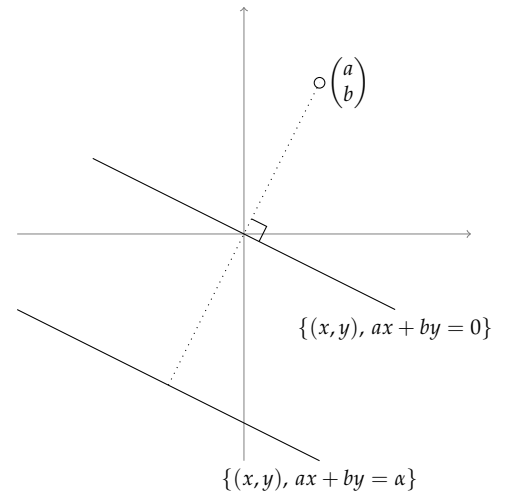
Définition 5.7 Dans un espace vectoriel normé, on appelle hyperplan affine un ensemble de la forme

$$H_\alpha = \{x \in E, \langle h, x \rangle_{E', E} = \alpha\} \text{ où } h \in E'.$$

On remarque que H_α est fermé comme image réciproque du fermé $\{\alpha\}$ par l'application continue h .

■ **Exemple 5.4** Dans \mathbf{R}^2 , si $h(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, H_α est la droite parallèle à $\ker h$ telle que

$$ax_1 + bx_2 = \alpha.$$



Définition 5.8 Soit A et B deux parties de E , on dit que l'hyperplan H_α sépare A et B au sens large si

$$h(x) \leq \alpha \text{ si } x \in A \text{ et } h(x) \geq \alpha \text{ si } x \in B.$$

Il les sépare au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$h(x) \leq \alpha - \varepsilon \text{ si } x \in A \text{ et } h(x) \geq \alpha + \varepsilon \text{ si } x \in B.$$

On peut aussi écrire

$$\sup_{x \in A} h(x) \leq \inf_{x \in B} h(x).$$

pour la séparation large et

$$\sup_{x \in A} h(x) < \inf_{x \in B} h(x).$$

pour la séparation stricte.

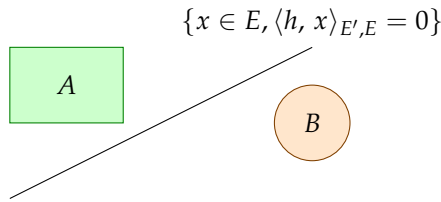


FIGURE 5.2: Géométriquement, les deux ensembles A et B sont de part et d'autre de l'hyperplan séparateur

5.2 Théorème de Hahn-Banach

Définition 5.9 Soit E un espace vectoriel normé. Une application sous linéaire j est une application de E dans \mathbf{R} telle que

$$j(\lambda x) = \lambda j(x), \quad \forall x \in E, \forall \lambda > 0 \quad (5.6)$$

$$j(x + y) \leq j(x) + j(y), \quad \forall x, y \in E. \quad (5.7)$$

Théorème 5.10 — Théorème de Hahn-Banach. Soit G un sous-espace vectoriel de E et j sous linéaire. Soit g une application linéaire de G dans \mathbf{R} telle que

$$g(x) \leq j(x), \quad \forall x \in G.$$

Alors il existe une forme linéaire f qui prolonge g :

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in G$$

et telle que

$$f(x) \leq j(x), \forall x \in E.$$

Corollaire 5.11 Soit G un sous-espace vectoriel de E et g une forme linéaire continue sur G de norme

$$\|g\|_{G'} = \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\|_E \leq 1}} |g(x)|.$$

Il existe f forme linéaire continue définie sur E qui prolonge g et telle que

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}.$$

Démonstration. Appliquer le théorème 5.10 à $j(x) = \|g\|_{G'} \|x\|_E$. ■

Plus intéressant est le corollaire du corollaire :

Corollaire 5.12 Pour tout $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in E'$ tel que

$$\|f_0\|_{E'} = \|x_0\|_E \text{ et } \langle f_0, x_0 \rangle_{E',E} = \|x_0\|_E^2.$$

Démonstration. Appliquer le corollaire 5.11 à $G = \mathbf{R}x_0$ et

$$g(tx_0) = t\|x_0\|^2$$

de sorte que $\|g\|_{G'} = \|x_0\|_E$. ■

Et encore plus intéressant, le corollaire du corollaire du corollaire.

Corollaire 5.13 Pour tout $x \in E$,

$$\|x\|_E = \max_{\|f\|_{E'} \leq 1} |\langle f, x \rangle_{E',E}|.$$

On notera que c'est un max et non un sup, ce qui signifie que la borne est atteinte pour une certaine forme linéaire.

Démonstration. D'une part, par définition de la norme dans E' , on a

$$|\langle f, x \rangle_{E',E}| \leq \|f\|_{E'} \|x\|_E$$

donc

$$\sup_{\|f\|_{E'} \leq 1} |\langle f, x \rangle_{E',E}| \leq \|x\|_E.$$

D'autre part, d'après le corollaire 5.12, il existe $f_0 \in E'$ tel que

$$\|f_0\|_{E'} = \|x\|_E \text{ et } \langle f_0, x \rangle_{E',E} = \|x\|_E^2.$$

Posons alors

$$f_1 = \frac{f_0}{\|f_0\|_{E'}} = \frac{f_0}{\|x\|_E}.$$

On a évidemment $\|f_1\|_{E'} = 1$ et

$$\langle f_1, x \rangle_{E',E} = \|x\|_E,$$

d'où le résultat. ■

Exercice 5.4 On considère $E = \mathbf{R}^n$ muni de la norme ℓ^1 . Soit $x \in \mathbf{R}^n$.

- 1) Trouver $f \in E'$ telle que $\|f\|_{E'} = \|x\|_E$ et $\langle f, x \rangle_{E',E} = \|x\|_1^2$.
- 2) f est-elle toujours unique?

■

5.3 Ensembles et fonctions convexes

Définition 5.14 Un ensemble C est convexe si pour tout $x, y \in C$, pour tout $\alpha \in [0, 1]$,

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in C.$$

En d'autres termes, pour toute paire de points de C , tout le segment entre ces deux points est inclus dans C .

Exercice 5.5 Soit E un espace vectoriel normé. On appelle application de dualité, l'application qui à $x \in E$ associe le sous ensemble de E'

$$F(x) = \left\{ f \in E', \|f\|_{E'} = \|x\|_E \text{ et } \langle f, x \rangle_{E', E} = \|x\|_E^2 \right\}.$$

1) Montrer que l'on a aussi

$$F(x) = \left\{ f \in E', \|f\|_{E'} \leq \|x\|_E \text{ et } \langle f, x \rangle_{E', E} = \|x\|_E^2 \right\}.$$

2) En déduire que $F(x)$ est non vide, convexe et fermé.

On dit qu'un espace vectoriel normé est strictement convexe si

$$\|f\| = \|g\| = 1 \text{ et } f \neq g \implies \|tf + (1 - t)g\| < 1, \forall t \in]0, 1[.$$

3) Parmi les espaces (\mathbf{R}^n, ℓ^p) . Quels sont ceux qui sont strictement convexes?

4) Montrer que si E' est strictement convexe alors $F(x)$ est réduit à un singleton.

■

Exercice 5.6 — Diagramme de Voronoi. On considère n points $\{x_1, \dots, x_n\}$ dans le plan et l'ensemble

$$C = \left\{ x, \|x\| \leq \min_{i=1}^n \|x - x_i\| \right\}$$

l'ensemble des points qui sont plus proches de 0 que de l'un des x_i .

1) Montrer que C est convexe.

■

Une notion importante est celle de jauge d'un convexe :

Définition 5.15 Soit C un convexe ouvert de E tel que $0 \in C$. Pour $x \in E$, on pose

$$j(x) = \inf\{\alpha > 0, \alpha^{-1}x \in C\}.$$

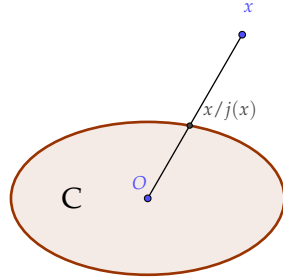


FIGURE 5.3: Jauge d'une ellipse

Lemme 5.16 Avec les notations de la définition 5.15, la fonction j est sous linéaire. De plus,

1) il existe $M > 0$ tel que

$$0 \leq j(x) \leq M \|x\|_E, \quad \forall x \in E,$$

2) on peut retrouver C à partir de sa jauge

$$C = \{x \in E, j(x) < 1\}.$$

Démonstration. **PREUVE DE 1..** Comme C est ouvert et contient 0 , il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset C$. Pour tout $x \in E$,

$$\alpha^{-1}x \in B(0, r) \implies \alpha^{-1}x \in C.$$

Pour tout $x \in E$, il est clair que

$$\frac{rx}{\|x\|_E} \in B(0, r) \subset C.$$

Par conséquent,

$$j(x) \leq \frac{1}{r} \|x\|_E$$

donc 1. est vérifié.

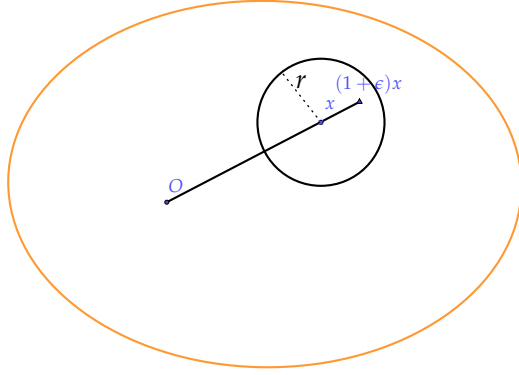
La propriété (5.6) d'homogénéité de j est évidemment vérifiée.

PREUVE DE 2.. Soit $x \in C$, il existe $r > 0$ tel que

$$B(x, r) \subset C.$$

Pour $0 < \epsilon < r/\|x\|_E$, $(1 + \epsilon)x$ appartient à C . Par définition d'une fonction de jauge, ceci signifie que

$$j(x) \leq \frac{1}{1 + \epsilon} < 1.$$

FIGURE 5.4: $C = \{x, j(x) < 1\}$

Soit maintenant, x tel que $j(x) < 1$, il existe donc $\alpha \in]0, 1[$ tel que

$$\alpha^{-1}x \in C.$$

Comme l'on peut écrire

$$x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1 - \alpha)0,$$

on en déduit que x appartient à C , d'où 2..

PREUVE DE LA SOUS LINÉARITÉ. Soit $x, y \in E$ et fixons $\epsilon > 0$. D'après ce qui précède

$$x_\epsilon = \frac{x}{j(x) + \epsilon} \in C \text{ et } y_\epsilon = \frac{y}{j(y) + \epsilon} \in C.$$

Comme C est convexe, $\alpha x_\epsilon + (1 - \alpha)y_\epsilon$ appartient à C pour tout $\alpha \in [0, 1]$. Choisissons

$$\alpha = \frac{j(x) + \epsilon}{j(x) + j(y) + 2\epsilon}.$$

On obtient que

$$\frac{x + y}{j(x) + j(y) + 2\epsilon} \in C$$

donc

$$j(x + y) \leq j(x) + j(y) + 2\epsilon.$$

Comme ϵ était arbitraire, on obtient bien (5.7). ■

Le deuxième lemme contient en germe le résultat général.

Lemme 5.17 Soit C un ouvert convexe et x_0 tel que $x_0 \notin C$. Il existe $f \in E'$ qui sépare C et $\{x_0\}$ au sens large.

Démonstration. Quitte à tout translater, on peut toujours supposer que $0 \in C$.

On pose $G = \mathbf{R}x_0$ et l'on définit sur G , la forme linéaire

$$g(tx_0) = t, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

On note j_C , la jauge de C . Montrons que

$$g(x) \leq j_C(x), \forall x \in G.$$

En effet, si $x = tx_0$ avec $t \leq 0$, c'est immédiat puisque j_C est une fonction positive. Si $t > 0$,

$$g(x) = t \text{ et } j_C(tx_0) = t j_C(x_0).$$

Comme x_0 n'appartient pas à C , $j_C(x_0) \geq 1$ donc

$$g(x) \leq j_C(x), \forall x \in G.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E'$ qui prolonge g et telle que

$$\langle f, x \rangle_{E', E} \leq j_C(x), \forall x \in E.$$

D'après 2.,

$$C \subset \{x, \langle f, x \rangle_{E', E} < 1\}$$

et comme f prolonge g , $\langle f, x_0 \rangle_{E', E} = 1$. ■

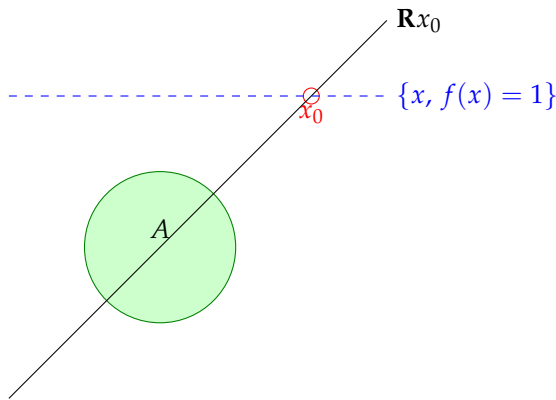


FIGURE 5.5: Une version possible de l'hyperplan séparant C et x_0

On peut alors donner la version géométrique du théorème de Hahn-Banach :

Théorème 5.18 — Hahn-Banach géométrique. Soit A et B deux convexes de E , non vides et disjoints.

- 1) Si A est ouvert alors il existe un hyperplan qui sépare A et B au sens large,
- 2) Si A est fermé et B est compact, il existe un hyperplan qui sépare A et B au sens strict.

Définition 5.19 On appelle demi-espace un sous-ensemble de E de la forme $\{x, h(x) \leq \alpha\}$ ou $\{x, h(x) \geq \alpha\}$ pour une forme linéaire $h \in E'$.

Théorème 5.20 Un ensemble convexe fermé est l'intersection des demi-espaces qui le contiennent.

Démonstration. Que C convexe fermé soit dans l'intersection de demi-espaces qui le contiennent est une évidence.

Réciproquement, soit D l'intersection des demi-espaces qui contiennent C . S'il existe $x \notin C$ mais $x \in D$, d'après 2., on peut séparer le fermé C et le compact $\{x\}$ par un hyperplan donc $x \notin D$. Par l'absurde, on en déduit que x appartient à D . ■

■ **Remarque 6** Quand il n'y a qu'un nombre fini de demi-espaces, on a un polyèdre convexe. Outre l'exemple du diagramme de Voronoi, on peut aussi considérer l'enveloppe convexe d'un ensemble A , définie comme le plus petit convexe qui contient A .

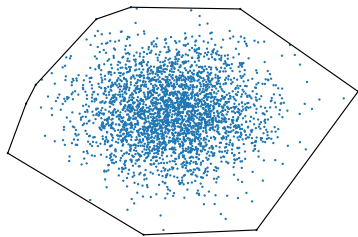


FIGURE 5.6: L'enveloppe convexe d'un nuage de points aléatoires

Une autre conséquence du théorème de séparation est un résultat de localisation des extréma d'une fonction convexe.

Définition 5.21 Une fonction $f : C \subset E \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ est dite convexe si C est convexe et pour tout $x, y \in C$, pour tout $\alpha \in [0, 1]$,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Définition 5.22 Soit C un convexe de E . Le point x de C est extrémal s'il n'appartient à aucun segment ouvert d'extrémités dans E .

De manière équivalente, on peut dire que x est un point extrémal de C si et seulement si on a l'implication

$$y, z \in C, x = \frac{y+z}{2} \implies x = y = z.$$

La preuve du résultat suivant est loin d'être triviale. À l'instar du théorème de Hahn-Banach, elle repose sur le lemme de Zorn.

Théorème 5.23 — Principe du maximum. Soit E un espace de Banach et C un convexe compact non vide de E . Soit f une fonction convexe continue définie sur C , elle atteint son maximum en l'un des points extrémaux de C .

Ce théorème est à la base de la *programmation linéaire*, c'est-à-dire la résolution de problèmes d'optimisation de la forme

$$\max_{x \in \mathbf{R}_+^n} \langle c, x \rangle_{\mathbf{R}^n} \text{ sous la contrainte } Ax \leq b.$$

Exercice 5.7 Soit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

1) Géométriquement, pour $\alpha \in \mathbf{R}$, quel est l'ensemble

$$E_\alpha = \{x \in \mathbf{R}^2, \langle Ax, x \rangle = \alpha\}?$$

Soit C le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

2) Trouver

$$\max_{x \in C} \langle Ax, x \rangle$$

On pourra interpréter géométriquement le problème.

■ **Remarque 7** Dans ce genre de problème, le polyèdre le plus simple est le carré unité $[0, 1]^d$ si on a d variables donc que l'on travaille dans \mathbf{R}^d . Un tel polyèdre a 2^d sommets donc 2^d points extrémaux. Le simple inventaire de tous ces points est donc infaisable en temps raisonnable dès que d dépasse la vingtaine de variables (on a un million de points à énumérer). Il faut donc trouver des algorithmes qui dépassent cette *malédiction de la dimension*. ■

6

Fonctions convexes

Définition 6.1 — Epigraphe. Pour $f : E \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, on définit son **epi**(f), noté $\text{epi}(f)$, le sous-ensemble de $E \times \mathbf{R}$:

$$\text{epi}(f) = \{(x, \xi) \in E \times \mathbf{R}, \xi \geq f(x)\}.$$

Définition 6.2 Une fonction $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ est dite *semi continue inférieurement* (s.c.i.) lorsque pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, l'ensemble

$$\{x, f(x) \leq \lambda\}$$

est fermé.

On a le lien suivant entre semi continuité inférieure et épigraphe dont la preuve est dans les exercices.

Théorème 6.3 On a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

- 1) La fonction f est s.c.i.
- 2) Pour tout $x \in E$, pour toute suite $(x_n, n \geq 1)$ de points de E convergeant vers x , on a

$$\liminf_n f(x_n) \geq f(x).$$

- 3) L'épigraphe de f est fermé.

On a aussi la généralisation du théorème qui dit qu'une fonction continue sur un compact atteint ses bornes.

Théorème 6.4 Une fonction s.c.i. définie sur un compact atteint sa borne inférieure.

Il n'est pas difficile de voir que

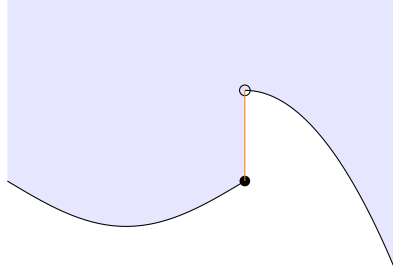


FIGURE 6.1: Le point rempli indique la valeur de la fonction, le point vide sa limite à droite. Le segment orange est inclus dans l'épigraphe (en violet) donc celui-ci est fermé. Si on permute les points rempli et vide, la segment orange n'est plus dans l'épigraphe, qui n'est donc plus fermé.

Théorème 6.5 Toute somme finie de fonctions s.c.i. est s.c.i. Le supremum d'une famille de fonctions s.c.i. , i.e.

$$x \mapsto \sup_{i \in I} f_i(x),$$

est s.c.i.

■ **Remarque 8** On peut multiplier une fonction s.c.i. par un réel positif et obtenir une fonction s.c.i. mais si on multiplie par un réel négatif, on obtient une fonction semi continue supérieurement, c'est-à-dire telle que

$$\{x, f(x) > \lambda\}$$

est un ouvert pour tout λ . L'ensemble des fonctions s.c.i. est un cône et pas un espace vectoriel. ■

Remarquons que $f(x) \neq +\infty$ si et seulement $x \in \text{epi}(f)$. On note

$$\text{Dom}(f) = \{x \in E, f(x) \neq +\infty\}.$$

Définition 6.6 On dit qu'une fonction $f : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est convexe si pour tout $x, y \in E$, pour tout $\alpha \in [0, 1]$,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \quad (6.1)$$

La fonction f est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte dès que $x \neq y$ et $\alpha \notin \{0, 1\}$.

Une fonction f est concave si $-f$ est convexe.

Une fonction convexe est propre si elle n'est pas identiquement infinie (i.e., son domaine n'est pas vide) et ne prend pas la valeur $-\infty$.

■ **Remarque 9** Par récurrence, on peut montrer que (6.1) est équivalente à la version avec n points : soit (x_1, \dots, x_n) des points de E et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ des réels positifs de somme égalé à 1, alors f est convexe si et seulement si

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

Dans tout ce qui suit, on sous-entend par convexe, une fonction convexe semi continue inférieurement et propre. ■

Lemme 6.7 Toute combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est une fonction convexe.

Le sup d'une famille de fonctions convexes est convexe (d'où l'intérêt de considérer des fonctions à valeurs éventuellement infinies).

Le lemme suivant découle directement des définitions.

Lemme 6.8 Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.

■ **Exemple 6.1 — Fonction caractéristique convexe.** La fonction caractéristique d'un ensemble est habituellement la fonction

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A : E &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Même si A est un ensemble convexe, cette fonction n'est pas convexe (il suffit de regarder son épigraphe). On introduit alors la fonction caractéristique convexe par

$$\begin{aligned} \chi_A : E &\longrightarrow \{0, +\infty\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\text{epi}(\chi_A) = A \times \mathbf{R}^+$, on a directement que χ_A est convexe si et seulement si A est convexe. ■

On admettra le théorème suivant

Théorème 6.9 Toute fonction convexe de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} est continue sur l'intérieur de son domaine.

Théorème 6.10 Soit C un ouvert convexe de \mathbf{R}^n et

$$f : C \rightarrow]-\infty, +\infty]$$

une fonction différentiable sur C .

La fonction f est convexe si et seulement si

$$f(z) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), z - x \rangle, \quad \forall x, z \in C. \quad (6.2)$$

■ **Remarque 10** En dimension 1, comme

$$y = f(x) + f'(x)(z - x)$$

est l'équation de la tangente au graphe de f au point x , l'inégalité (6.2) signifie que le graphe de f est au dessus de toutes ses tangentes.

En d'autres termes, en toute dimension, l'épigraphe de f est dans l'intersection des demi-espaces délimités par les hyper-plans tangents.

Démonstration. (6.2) \implies CONVEXITÉ. Supposons que (6.2) soit vérifiée. Soit x, y donné dans C et $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(z) + \langle \nabla f(z), x - z \rangle \\ f(y) &\geq f(z) + \langle \nabla f(z), y - z \rangle. \end{aligned}$$

En sommant ces deux inégalités on obtient

$$\alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \geq f(z) + \langle \nabla f(z), (\alpha x + (1 - \alpha)y) - z \rangle = f(z),$$

d'où la convexité.

CONVEXITÉ \implies (6.2). Réciproquement, soit f convexe et $x \neq z$, deux éléments de C . On pose

$$g(\alpha) = \frac{f(x + \alpha(z - x)) - f(x)}{\alpha}$$

Supposons montré que g est croissante alors

$$\langle \nabla f(x), z - x \rangle = \lim_{\alpha \downarrow 0} g(\alpha) \leq g(1) = f(z) - f(x),$$

ce qui implique (6.2). Montrons maintenant la croissance de g . Soit $0 < \alpha < \beta < 1$ et posons

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta}, u = x + \beta(z - x).$$

On a

$$f(x + \gamma(u - x)) \leq \gamma f(u) + (1 - \gamma)f(x)$$

soit

$$f(x + \gamma(u - x)) - f(x) \leq \gamma(f(u) - f(x))$$

ou encore

$$\frac{f(x + \alpha(z - x))}{\alpha} \leq \frac{f(x + \beta(z - x))}{\beta},$$

soit g croissante. ■

Pour les fonctions de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} , la différentielle seconde s'identifie à la matrice

$$\nabla^{(2)} f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), 1 \leq i, j \leq n \right).$$

D'après le théorème de Schwarz qui dit que l'ordre de dérivation partielle n'importe pas, cette matrice est symétrique. Elle définit donc une forme bilinéaire par

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (y, z) &\longmapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) y_i z_j \end{aligned}$$

ou de façon plus compacte

$$(y, z) \longmapsto \langle \nabla^{(2)} f(x) y, z \rangle,$$

on applique la matrice $\nabla^{(2)} f(x)$ au vecteur y et l'on prend le produit scalaire du vecteur qui en résulte avec z . Il y a alors équivalence entre

i) Pour tout $y \in \mathbf{R}^n$,

$$\langle \nabla^{(2)} f(x) y, y \rangle \geq 0,$$

ii) Les valeurs propres (réelles) de la matrice $\nabla^{(2)} f(x)$ sont positives.

On dit alors que la matrice $\nabla^{(2)} f(x)$ est semi-définie positive. Si les inégalités précédentes sont strictes alors elle est dite définie positive.

Corollaire 6.11 Soit C un ouvert convexe de \mathbf{R}^n et

$$f : C \rightarrow]-\infty, +\infty]$$

une fonction deux fois différentiable sur C .

Si $\nabla^{(2)} f(x)$ est une matrice symétrique semi-définie (respectivement définie) positive alors f est convexe (respectivement strictement convexe).

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis qui stipule que pour tout $x, y \in C$, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \nabla^{(2)} f(x + \alpha(y - x)) (y - x), y - x \rangle. \end{aligned}$$

■

Corollaire 6.12 Pour $p \geq 1$, la fonction définie sur \mathbf{R}^+ par $x \mapsto x^p$ est convexe. On a en particulier

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right|^p \leq n^{p-1} \sum_{i=1}^n |x_i|^p.$$

Démonstration. La dérivée seconde est $p(p-1)x^{p-2}$ qui est positive sur \mathbf{R}^+ donc il suffit d'appliquer le corollaire 6.11. ■

Exercice 6.1 1) Montrer que $f : \mathbf{R}^n \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est convexe si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$, la fonction

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\longrightarrow]-\infty, +\infty] \\ t &\longmapsto f(x + ty) \end{aligned}$$

est convexe.

On note S_n^{++} , l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille n . On considère

$$\begin{aligned} f : S_n^{++} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ M &\longmapsto -\log \det M \end{aligned}$$

2) Montrer que f est convexe.

Indication : si $M \in S_n^{++}$, on construira $M^{1/2} \in S_n^{++}$ telle que $M^{1/2}M^{1/2} = M$. On notera $M^{-1/2}$ l'inverse de $M^{1/2}$.

■

6.1 Fonctions convexes conjuguées

Avant d'aller plus loin, décrivons les formes linéaires continues sur $E \times \mathbf{R}$ où E est un espace vectoriel normé de dual topologique E' .

Théorème 6.13 Le dual topologique de $E \times \mathbf{R}$ est $E' \times \mathbf{R}$. Autrement dit, une forme linéaire continue sur $E \times \mathbf{R}$ se décompose sous la forme d'un couple composé de $x' \in E'$ et de $\lambda \in \mathbf{R}$ et

$$\langle (x', \lambda), (x, \alpha) \rangle = \langle x', x \rangle_{E', E} + \lambda \alpha. \quad (6.3)$$

Démonstration. ÉTAPE 1. Il est évident que la formule (6.3) définit une forme linéaire, qui plus est continue vu que

$$|\langle (x', \lambda), (x, \alpha) \rangle| \leq \|x'\|_{E'} \|x\|_E + |\lambda| |\alpha|.$$

ÉTAPE 2. Réciproquement, si f est une forme linéaire continue sur $E \times \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \langle f, (x, 0) \rangle \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue sur E donc il existe $x' \in E'$ tel que

$$\langle f, (x, 0) \rangle = \langle x', x \rangle_{E', E}.$$

Par linéarité,

$$\begin{aligned}\langle f, (x, \alpha) \rangle &= \langle f, (x, \alpha \cdot 1) \rangle \\ &= \langle f, (x, 0) \rangle + \alpha \langle f, (0_E, 1) \rangle \\ &= \langle x', x \rangle_{E', E} + \lambda \alpha\end{aligned}$$

en ayant posé

$$\lambda = \langle f, (0_E, 1) \rangle.$$

■

On a vu que le sup d'une famille de fonctions convexes est convexe, on a une sorte de réciproque.

Théorème 6.14 Une fonction convexe est en tout point le sup des fonctions affines qui la minore.

Démonstration. ÉTAPE 1. Montrons d'abord qu'il existe au moins une fonction affine qui minore f . Comme on a convenu que f convexe signifiait entre autre que f était propre, il existe x_0 tel que $f(x_0) < \infty$. Soit r_0 tel que

$$r_0 < f(x_0) \text{ donc tel que } (x_0, r_0) \notin \text{epi}(f).$$

D'après le théorème de séparation appliqué à $\text{epi}(f)$ qui est un ensemble convexe fermé de $E \times \mathbf{R}$ et $\{(x_0, r_0)\}$ qui est un compact de $E \times \mathbf{R}$ (voir figure 6.2), il existe une forme linéaire continue sur $E \times \mathbf{R}$ qui sépare ces deux ensembles strictement : il existe $(x'_0, \lambda_0) \in E' \times \mathbf{R}$ et $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $(x, r) \in \text{epi}(f)$,

$$\langle (x'_0, \lambda_0), (x, r) \rangle \geq \gamma > \langle (x'_0, \lambda_0), (x_0, r_0) \rangle. \quad (6.4)$$

En particulier,

$$\langle (x'_0, \lambda_0), (x_0, f(x_0)) \rangle > \langle (x'_0, \lambda_0), (x_0, r_0) \rangle$$

soit

$$\langle x'_0, x_0 \rangle_{E', E} + \lambda_0 f(x_0) > \langle x'_0, x_0 \rangle_{E', E} + \lambda_0 r_0.$$

Comme on a déjà $r_0 < f(x_0)$, on a nécessairement $\lambda_0 > 0$. On peut donc diviser l'inégalité

$$\langle x'_0, x \rangle_{E', E} + \lambda_0 f(x) \geq \gamma$$

par λ_0 d'où

$$f(x) \geq \frac{1}{\lambda_0} (\gamma - \langle x'_0, x \rangle_{E', E}).$$

Il existe donc au moins une fonction affine qui minore f . On note p cette fonction :

$$p : x \mapsto \frac{1}{\lambda_0} (\gamma - \langle x'_0, x \rangle_{E', E}).$$

ÉTAPE 2. Le théorème sera prouvé si l'on établit que pour tout (x_1, r_1) avec $r_1 < f(x_1)$, il existe une fonction affine q qui minore f et telle que $q(x) > r_1$. On utilise encore une fois le théorème de séparation pour obtenir l'existence de (x', λ) tels que pour tout $(x, r) \in \text{epi}(f)$

$$\langle x', x \rangle_{E', E} + \lambda r \geq \beta > \langle x', x_1 \rangle_{E', E} + \lambda r_1. \quad (6.5)$$

Comme

$$\lambda f(x_1) > \lambda r_1$$

on a encore $\lambda > 0$. Par conséquent,

$$f(x) \geq \frac{1}{\lambda} (\beta - \langle x', x \rangle_{E', E})$$

donc la fonction affine

$$q : x \mapsto \frac{1}{\lambda} (\beta - \langle x', x \rangle_{E', E})$$

minore f et la deuxième partie de (6.5) induit que

$$q(x_1) > r_1,$$

ce que l'on voulait. ■

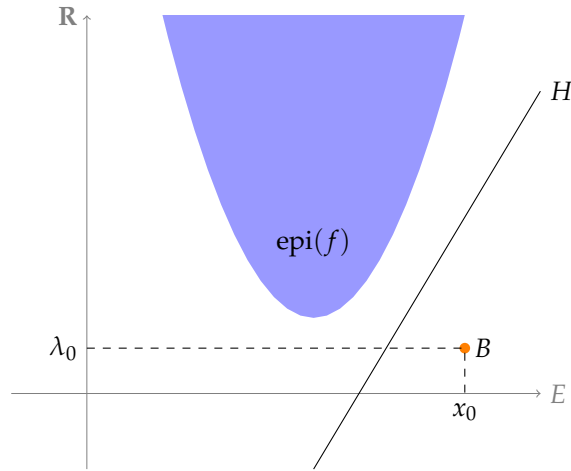


FIGURE 6.2: Séparation de l'épigraphe et d'un point

Corollaire 6.15 — Inégalité de Jensen. Soit μ une mesure de probabilité et φ une fonction convexe de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^+ telle que

$$\int_E \varphi(f) \, d\mu < \infty.$$

On a

$$\varphi \left(\int_E f \, d\mu \right) \leq \int_E \varphi(f) \, d\mu. \quad (6.6)$$

Démonstration. Pour $\varphi_{ab}(x) = ax + b$,

$$\begin{aligned} \varphi_{ab} \left(\int_E f \, d\mu \right) &= a \int_E f \, d\mu + b \int_E 1 \, d\mu \\ &= \int_E (af + b) \, d\mu \\ &= \int_E \varphi_{ab}(f) \, d\mu \end{aligned}$$

puisque μ est une mesure de probabilités. Comme φ est le sup des fonctions affines qui la minorent, si l'on note

$$\Sigma(\varphi) = \left\{ (a, b) \in \mathbf{R}^2, \varphi_{ab} \leq \varphi \right\},$$

on a

$$\begin{aligned} \sup_{a,b \in \Sigma(\varphi)} \int_E (af + b) \, d\mu &= \int_E \sup_{a,b} (af + b) \, d\mu \\ &= \int_E \varphi(f) \, d\mu. \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{a,b \in \Sigma(\varphi)} \varphi_{ab} \left(\int_E f \, d\mu \right) \leq \int_E \varphi(f) \, d\mu$$

soit exactement (6.6). ■

En optimisation convexe, la notion de fonction conjuguée ou polaire d'une fonction convexe joue un rôle primordial.

Définition 6.16 Soit E un espace vectoriel normé de dual E' . Soit $f : E \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, sa fonction conjuguée f^* est définie par

$$\begin{aligned} f^* : E' &\longrightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \\ x' &\longmapsto \sup_{x \in E} \left(\langle x', x \rangle_{E',E} - f(x) \right). \end{aligned}$$

■ **Remarque 11** Le théorème 6.14 indique au passage que si f est convexe (s.c.i. et propre) alors il existe au moins une fonction affine qui la minore donc f^* n'est pas identiquement infinie. ■

■ **Remarque 12** On remarque que

$$f^*(0) = \sup_{x \in E} (-f(x)) = - \inf_{x \in E} f(x) \implies \inf_{x \in E} f(x) = -f^*(0)$$

donc minimiser f revient à calculer la valeur de sa fonction conjuguée en 0, ce qui ne nécessite pas forcément de passer par la dérivée. ■

■ **Exemple 6.2** Un entreprise produit un article dont le coût est une fonction convexe du nombre produit $S(r)$. Le prix unitaire de l'article est p donc le profit maximal de l'entreprise est

$$\sup_r (pr - S(r)) = S^*(p).$$

■

Lemme 6.17 La fonction f^* est convexe et semi continue inférieurement.

Démonstration. Pour tout $x \in E$, la fonction

$$\begin{aligned} \tau_x : E' &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x' &\longmapsto \langle x', x \rangle_{E', E} - f(x) \end{aligned}$$

est affine (linéaire plus constante) donc convexe. De plus, elle est continue puisque

$$|\tau_x(x') - \tau_x(y')| \leq |\langle x' - y', x \rangle_{E', E}| \leq \|x' - y'\|_{E'} \|x\|_E.$$

Elle est donc s.c.i. donc $\sup_{x \in E} \tau_x$ est aussi s.c.i. Comme le sup d'une famille de fonctions convexes est convexe, f^* est convexe. ■

Tant qu'à jouer, on peut recommencer et considérer la conjuguée de la conjuguée, la bi-conjuguée ou la bi-polaire de f :

Définition 6.18 Soit $f : E \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Sa bi-conjuguée est définie par

$$\begin{aligned} f^{**} : E &\longrightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \\ x &\longmapsto \sup_{x' \in E'} (\langle x', x \rangle_{E', E} - f^*(x')). \end{aligned}$$

Mais les meilleurs jeux ont une fin :

Théorème 6.19 Soit f convexe, s.c.i. et propre, $f = f^{**}$.

Démonstration. Compte-tenu du théorème 6.14, il suffit de montrer que f^{**} est la plus grande des fonctions affines qui minorent f .

ÉTAPE 1. Dans un premier temps, fixons $x' \in E'$. Une fonction affine

$$x \mapsto \langle x', x \rangle_{E', E} - \alpha$$

minore f si

$$\forall x \in E, \langle x', x \rangle_{E', E} - \alpha \leq f(x).$$

Autrement dit si

$$\alpha \geq \sup_{x \in E} (\langle x', x \rangle_{E', E} - f(x))$$

soit

$$\alpha \geq f^*(x').$$

Soit $A(x')$ l'ensemble des fonctions affines qui minorent f :

$$A(x') = \{\alpha \in \mathbf{R}, \langle x', x \rangle_{E', E} - \alpha \leq f(x) \forall x \in E\}.$$

D'après ce qui précède, cet ensemble admet un plus grand élément atteint pour le plus petit α possible, soit $\alpha = f^*(x')$ qui donne la fonction affine

$$x \mapsto \langle x', x \rangle_{E', E} - f^*(x').$$

ÉTAPE 2. On connaît donc à x' donné la fonction affine minorant f la plus grande possible. Si on maximise en x' à x fixé, i.e. si l'on considère

$$\sup_{x' \in E'} (\langle x', x \rangle_{E', E} - f^*(x'))$$

on aura nécessairement atteint la plus grande fonction affine possible, or cette identité est précisément la définition de f^{**} . ■

Exercice 6.2 On se place dans \mathbf{R}^n et l'on considère

$$f(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$$

pour n'importe quelle norme sur \mathbf{R}^n .

1) Calculer f^* .

On prend E un espace vectoriel normé et l'on considère

$$\forall x \in E, f(x) = \|x\|.$$

2) Montrer que

$$f^*(x') = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x'\|_{E'} \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

■

Exercice 6.3 — Théorème de Gartner-Ellis. Soit X une variable aléatoire réelle telle qu'il existe $s_0 \geq 0$ et $s_1 > 0$ avec

$$\mathbf{E} \left[e^{s_0 X} \right] < \infty, \quad \mathbf{E} \left[e^{s_1 X} \right] < \infty.$$

- 1) Montrer que la fonction $\phi_X : s \mapsto \mathbf{E} \left[e^{sX} \right]$ est positive, continue et convexe sur $]s_0, s_1[$.
- 2) Montrer que si $\mathbf{E} [X] = 0$ alors Φ_X atteint son minimum en 0 et que $\Phi_X \geq 1$.

On pose

$$\Phi_X = \log \phi_X.$$

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n, n \geq 1)$ telle que

$$\frac{1}{n} \Phi_{X_n}(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(s).$$

- 3) Montrer que Φ est convexe. Quelle est sa régularité minimale ?

On considère l'intervalle $[a, b]$ et l'on veut montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \in [a, b]\right) \leq - \inf_{x \in [a, b]} \Phi^*(x).$$

- 4) Montrer que

$$\bar{I} := \inf_{x \in [a, b]} \Phi^*(x) < \infty.$$

- 5) On fixe $\epsilon > 0$. Montrer que

$$[a, b] \subset \bigcup_{s \in \mathbf{R}} \{x, sx - \Phi(s) \geq \bar{I} - \epsilon\}. \quad (6.7)$$

- 6) Montrer qu'il existe (s_1, \dots, s_k) tels que

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^k \{x, s_i x - \Phi(s_i) \geq \bar{I} - \epsilon\}.$$

- 7) Montrer que pour tout s ,

$$\mathbf{P}\left(s \frac{X_n}{n} - \Phi(s) \geq \bar{I} - \epsilon\right) \leq \exp\left(-n(\Phi(s) + (\bar{I} - \epsilon))\right) e^{n\Phi_n(s)}.$$

- 8) En déduire que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \in [a, b]\right) \\ \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \exp\left(-n[\Phi(s_i) - \Phi_n(s_i) + \bar{I} - \epsilon]\right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

et donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \in [a, b]\right) \leq \bar{I} - \epsilon. \quad (6.9)$$

- 9) Soit $(Y_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbf{E}[|Y_1|] < \infty$. On pose

$$X_n = \sum_{i=1}^n (Y_i - m),$$

où $m = \mathbf{E}[Y_1]$. Montrer que X_n/n converge en probabilités vers 0.

■

```
;; -*- ispell-local-dictionary : "francais" -*-
```

7

Espaces de Hilbert

7.1 Définition et premières propriétés

Définition 7.1 Un produit scalaire sur un \mathbf{C} -espace vectoriel H est une application sesqui-linéaire à droite, définie positive :

- 1) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle,$
- 2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$
- 3) $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in E,$
- 4) $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0.$

Un produit scalaire définit automatiquement une norme par la relation

$$\|x\|_E = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Un produit scalaire sur un \mathbf{R} espace vectoriel H satisfait les mêmes propriétés avec la convention que $\bar{x} = x$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est valable pour tous les produits scalaires.

Théorème 7.2 — Inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour tout $x, y \in E,$

$$|\Re(\langle x, y \rangle)| \leq \|x\|_E \|y\|_E.$$

Démonstration. On sait que pour tout $t \in \mathbf{R}, \|x + ty\|_E^2 \geq 0$. Or le développement du produit scalaire donne

$$\begin{aligned} \|x + ty\|_E^2 &= \langle x + ty, x + ty \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + t \langle x, y \rangle + t \langle y, x \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + t(\langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle}) + t^2 \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2t \Re(\langle x, y \rangle) + t^2 \langle y, y \rangle. \end{aligned}$$

Le terme de droite est donc un polynôme du second degré en t qui est toujours positif. Son discriminant est donc négatif ou nul, cela implique que

$$\Re(\langle x, y \rangle)^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$



FIGURE 7.1: David Hilbert (1862 - 1943)

Cette identité équivaut à celle annoncée. ■

Définition 7.3 Un \mathbf{C} -espace vectoriel H , muni d'un produit scalaire est un espace de Hilbert lorsque H est complet pour la topologie induite par le produit scalaire.

■ **Exemple 7.1** 1) L'exemple de base est bien entendu \mathbf{R}^n muni du produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Si on travaille sur \mathbf{C}^n , il sera défini par

$$\langle x, y \rangle_{\mathbf{C}^n} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}.$$

2) Sa généralisation à $n = \infty$ est l'ensemble des suites indexées par \mathbf{N} dont la somme des carrés est finie :

$$\ell^2(\mathbf{N}) = \{(u_n, n \geq 0), \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 < \infty\}.$$

On le munit du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{\ell^2(\mathbf{N})} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n.$$

Indication : on utilisera l'identité de polarisation :

$$4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$$

pour montrer que $\ell^2(\mathbf{N})$ est un espace vectoriel et que le produit scalaire est bien défini.

3) Si A est une matrice symétrique définie positive (i.e. toutes ses valeurs propres sont strictement positives),

$$(x, y) \longmapsto \langle Ax, y \rangle_{\mathbf{R}^n}$$

est un produit scalaire.

Indication : on écrira l'expression de cette forme bilinéaire dans une base de diagonalisation de A .

4) Lorsque l'on travaille avec la mesure de Lebesgue, soit U un ouvert de \mathbf{R}^n ,

$$L^2(U, \ell) = \{f : U \rightarrow \mathbf{C}, \int_U |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_U f(x) \overline{g(x)} dx.$$

■

Les propriétés des espaces de Hilbert réels et complexes sont tellement similaires, que l'on ne précisera dorénavant plus le corps de base.

L'un des conséquences de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est la continuité du produit scalaire :

Lemme 7.4 Si $((x_n, y_n), n \geq 1)$ converge vers (x, y) dans $H \times H$ alors

$$\langle x_n, y_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle x, y \rangle.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que si x_n converge vers x alors la suite des normes $\|x_n\|$ converge vers $\|x\|$. En effet, on a de manière générale

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

Par conséquent,

$$\left| \|x_n\| - \|x\| \right| \leq \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

par hypothèse. D'où le résultat. Par ailleurs, une suite de réels convergente est nécessairement bornée donc

$$\sup_n \|x_n\| < \infty \text{ et } \sup_n \|y_n\| < \infty.$$

Maintenant,

$$\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle = \langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle.$$

D'après l'inégalité triangulaire et celle de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle \right| \leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\|.$$

Le premier terme est le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0 donc tend vers 0. Le deuxième tend vers 0 par hypothèse. ■

En manipulant les produits scalaires grâce à la bilinéarité, on obtient

Théorème 7.5 — Identité du parallélogramme. Soit H un espace de Hilbert, les identités suivantes sont vraies pour tout couple (x, y) d'éléments de H .

Identité du parallélogramme

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (7.1)$$

La somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

Identité de polarisation

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y \rangle \quad (7.2)$$

si le corps de base est \mathbf{R} et

$$(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) = 4\langle x, y \rangle$$

si le corps de base est \mathbf{C} .

7.2 *Théorème de projection*

Théorème 7.6 Soit A une partie non vide, convexe et fermée d'un espace de Hilbert H . Pour tout $x \in H$, il existe un unique $x_0 \in A$ tel que

$$\|x - x_0\| = \text{dist}(x, A) := \inf_{y \in A} \|x - y\|. \quad (7.3)$$

De plus, x_0 est caractérisé par les propriétés

- 1) x_0 appartient à A
- 2) Pour tout $v \in A$, on a la relation

$$\langle x - x_0, v - x_0 \rangle \leq 0. \quad (7.4)$$

Démonstration. Par définition d'une borne inférieure, il existe une suite $(x_n, n \geq 1)$ de points de A telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = \text{dist}(x, A). \quad (7.5)$$

Appliquons l'identité du parallélogramme à $x - x_n$ et $x - x_m$, on tire

$$2(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2) = \|2x - x_n - x_m\|^2 + \|x_n - x_m\|^2.$$

Par conséquent, comme A est convexe,

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= 2(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2) - 4\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\|^2 \\ &\leq 2(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2) - 4 \text{dist}(x, A)^2. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Quand n et m tendent vers l'infini, le terme de droite de cette inégalité tend vers 0 donc $(x_n, n \geq 1)$ est une suite de Cauchy. Soit x_0 sa limite. Comme A est fermé, x_0 appartient à A et de (7.5), on tire que $\|x - x_0\| = \text{dist}(x, A)$.

Si x_1 est un autre point de A tel que $\|x - x_1\| = \text{dist}(x, A)$, en appliquant (7.6) avec $n = 0$ et $m = 1$, on a

$$\|x_0 - x_1\|^2 \leq 0 \text{ d'où } x_1 = x_0.$$

Montrons maintenant que (7.3) équivaut à (7.4). Soit x_0 qui satisfait (7.3) et $w \in A$, le vecteur

$$v = (1 - t)x_0 + tw$$

appartient à A pour tout $t \in [0, 1]$. Par définition de x_0 ,

$$\|x - x_0\| \leq \|x - v\| = \|(x - x_0) - t(w - x_0)\|.$$

Par conséquent, en élevant cette relation au carré, on a

$$0 \leq \|x - x_0\|^2 \leq \|x - x_0\|^2 + t^2\|w - x_0\|^2 - 2t\langle x - x_0, w - x_0 \rangle,$$

pour tout $t \in [0, 1]$. Ce qui donne

$$2\langle x - x_0, w - x_0 \rangle \leq t\|w - x_0\|.$$

En faisant tendre t vers 0, on obtient (7.4).

Réciproquement, si x_0 satisfait (7.4), alors pour tout $v \in A$

$$\|x - x_0\|^2 - \|v - x_0\|^2 = 2\langle x - x_0, v - x_0 \rangle - \|x_0 - v\|^2 \leq 0,$$

d'où (7.3). ■

Corollaire 7.7 Dans le cas où A est un espace vectoriel fermé, le projeté de x sur A est caractérisé par les propriétés :

- 1) x_0 appartient à A
- 2) Pour tout $v \in A$, on a la relation

$$\langle x - x_0, v \rangle = 0. \quad (7.7)$$

Démonstration. On tire de (7.4) que

$$\langle x - x_0, v \rangle \leq \langle x - x_0, x_0 \rangle, \quad \forall v \in A.$$

Comme A est un espace vectoriel, pour tout réel t

$$t\langle x - x_0, v \rangle \leq \langle x - x_0, x_0 \rangle.$$

Comme le terme de droite ne dépend pas de t , la seule possibilité est que

$$\langle x - x_0, v \rangle = 0.$$

Réciproquement, si pour tout $v \in A$, (7.7) est satisfaite, comme x_0 appartient à A , $v - x_0$ aussi donc on a bien (7.4). ■

Corollaire 7.8 Avec les notations et les hypothèses du théorème 7.6, on note P_A l'opérateur de projection orthogonale sur A . Cet opérateur est lipschitzien :

$$\|P_A(x_1) - P_A(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Démonstration. Posons $u_i = P_A(x_i)$ pour $i = \{1, 2\}$. Pour tout $v \in A$, on a

$$\langle x_1 - u_1, v - u_1 \rangle \leq 0 \quad (7.8)$$

$$\langle x_2 - u_2, v - u_2 \rangle \leq 0. \quad (7.9)$$

On applique (7.8) à u_2 et (7.9) à u_1 d'où

$$\langle x_1 - u_1, u_2 - u_1 \rangle \leq 0$$

$$\langle x_2 - u_2, u_1 - u_2 \rangle \leq 0.$$

Après addition, on obtient

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq \langle x_1 - x_2, u_1 - u_2 \rangle.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq \|x_1 - x_2\| \|u_1 - u_2\|,$$

d'où le résultat. ■

Définition 7.9 Deux éléments x et y d'un espace de Hilbert H sont orthogonaux si et seulement si $\langle x, y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Pour F un sous-espace de H , on note F^\perp l'ensemble des éléments qui sont orthogonaux à tous les éléments de F :

$$F^\perp = \{ y \in H : \langle x, y \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in F \}.$$

Lemme 7.10 Pour tout sous-espace F , F^\perp est un sous-espace vectoriel fermé.

Démonstration. Pour tout $x \in H$, la forme linéaire $\phi_x(y) = \langle x, y \rangle$ est continue : d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \text{ donc } \sup_{y \neq 0} \frac{\|\phi_x(y)\|}{\|y\|} \leq \|x\|.$$

Par conséquent, $\ker \phi_x$ est un ensemble fermé et $F^\perp = \bigcap_{x \in F} \ker \phi_x$ aussi en tant qu'intersection d'ensembles fermés. ■

Le corollaire 7.7 se réécrit

Théorème 7.11 Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H , il y a équivalence entre

- 1) $\|x - x_0\| = \text{dist}(x, F)$,
- 2) $x_0 \in F$ et $x - x_0 \in F^\perp$.

■ **Exemple 7.2** Prenons \mathbf{R}^2 muni du produit scalaire usuel et

$$F = \text{vect}\{(1, 0)\},$$

l'espace vectoriel qui correspond à l'axe des abscisses. On prend le vecteur $x = (1, 1)$ et l'on cherche $p_F(x)$. On sait d'une part que $p_F(x) \in F$ donc $p_F(x) = \lambda(1, 0) = (\lambda, 0)$. D'autre part, tous les éléments de F étant de la forme $\beta(1, 0)$ avec $\beta \in \mathbf{R}$, on a

$$\langle x - p_F(x), \beta(1, 0) \rangle = 0. \quad (7.10)$$

En traduisant cette identité en termes de coordonnées, on obtient

$$\langle (1 - \lambda, 1), (\beta, 0) \rangle = 0$$

soit

$$\beta(1 - \lambda) + 0 = 0.$$

Comme ceci doit être vrai pour tout β , on a nécessairement $\lambda = 1$ donc $p_F((1, 1)) = (1, 0)$. ■

■ **Exemple 7.3** On reprend le même exemple que le précédent sauf que cette fois, on change le produit scalaire sur \mathbf{R}^2 . On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

dont les deux valeurs propres sont $1/2$ et $3/2$, donc elle est définie positive. On introduit alors ce nouveau produit scalaire

$$(x, y) = \langle Ax, y \rangle.$$

On reprend le raisonnement précédent. Seul change le produit scalaire donc (7.10) devient

$$(x - p_F(x), \beta(1, 0)) = 0 \iff \langle A(x - p_F(x)), \beta(1, 0) \rangle = 0.$$

Une fois traduit en coordonnées, on obtient

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

soit

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \lambda \\ \frac{3}{2} - \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

```
In [3]: var('x')
        M=Matrix([[1,x],[x,1]])
        M
Out[3]: [1 x]
        [x 1]
In [4]: M.eigenvalues()
Out[4]: [-x + 1, x + 1]
```

Ce qui impose $\lambda = 3/2$. Donc pour ce produit scalaire, $p_F((1,1)) = (3/2, 0)$. Cherchons F^\perp pour ce produit scalaire.

$$F^\perp = \{w = (w_1, w_2), \langle Aw, (\lambda, 0) \rangle = 0, \forall \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Une fois écrit en coordonnées, on obtient

$$w_1 + \frac{1}{2}w_2 = 0.$$

F^\perp est donc la droite de pente -2 . Si l'on projette le point $(1,1)$ sur l'axe des abscisses parallèlement à cette droite, on obtient bien le point d'abscisse $3/2$. ■

■ **Exemple 7.4** Considérons l'ensemble $\ell^2(\mathbf{N})$ des suites de carré intégrable et F l'espace vectoriel des suites nulles à partir du K -ième rang (K fixé une fois pour toute). Assurons-nous d'abord que F est bien fermé. L'application

$$\begin{aligned} \pi_n : \ell^2(\mathbf{N}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ u = (u_0, u_1, \dots) &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

est linéaire et continue car

$$u_n^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} u_k^2$$

donc

$$|\pi_n u|^2 \leq \|u\|_{\ell^2(\mathbf{N})}^2.$$

En passant aux racines carrées, on a bien

$$|\pi_n u| \leq \|u\|_{\ell^2(\mathbf{N})}.$$

Par conséquent, l'ensemble des suites dont la n -ième coordonnée est nulle est

$$\pi_n^{-1}(\{0\}),$$

donc c'est un fermé. Comme

$$F = \bigcap_{n=K+1}^{\infty} \pi_n^{-1}(\{0\}),$$

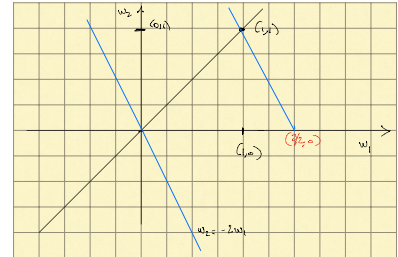
F apparaît comme une intersection de fermés donc c'est un fermé.

Maintenant, montrons que

$$p_F u = (u_0, u_1, \dots, u_K, 0, 0, \dots).$$

La suite proposée est bien un élément de F . D'autre part,

$$u - (u_0, u_1, \dots, u_K, 0, 0, \dots) = (0, \dots, 0, u_{K+1}, u_{K+2}, \dots).$$



Donc, si v est une suite donc seuls les K premiers termes sont non nuls,

$$\langle (0, \dots, 0, u_{K+1}, u_{K+2}, \dots), v \rangle = \sum_{k=0}^K 0 \cdot v_k + \sum_{k \geq K+1} u_k \cdot 0 = 0.$$

D'après la caractérisation du projeté (cf. Théorème 7.11). ■

Parmi les espaces vectoriels fermés, il y a bien évidemment les espaces vectoriels de dimension finie. Il en existe toutefois d'autres plus intéressants.

Définition 7.12 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, on note $L^2(\mathbf{P})$ l'espace des variables aléatoires X (i.e. des fonctions $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbf{R})$ mesurables) telles que

$$\mathbf{E} [|X|^2] < \infty.$$

Si \mathcal{F} est une sous-tribu de \mathcal{A} , on note $L^2(\mathcal{F}, \mathbf{P})$ l'ensemble des variables aléatoires X qui sont $\mathcal{F} / \mathcal{B}(\mathbf{R})$ mesurables et dans $L^2(\mathbf{P})$.

Lemme 7.13 L'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est un sous espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Démonstration. Les combinaisons linéaires de fonctions $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbf{R})$ sont $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbf{R})$ mesurables donc $L^2(\mathcal{F}, \mathbf{P})$ est un sous espace vectoriel de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Pour montrer qu'il est fermé, prenons une suite $(X_n, n \geq 1)$ une suite d'éléments de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ qui converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ vers X . D'après la preuve de la complétude des espaces L^p , on sait qu'il existe une sous-suite $(X_{n_k}, k \geq 1)$ qui converge \mathbf{P} -presque-sûrement vers X . Or une limite presque-sûre de fonctions $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbf{R})$ mesurables est $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbf{R})$ mesurable donc X appartient à $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. ■

Une façon classique de construire une sous-tribu est de ne considérer que la plus petite tribu qui rend une variable aléatoire donnée mesurable :

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})\}.$$

Le lemme de Doob donne une caractérisation intéressante des variables aléatoires Z qui sont $\sigma(X) - \mathcal{B}(\mathbf{R})$ -mesurables.

Lemme 7.14 Une variable aléatoire Z est $\sigma(X) / \mathcal{B}(\mathbf{R})$ -mesurable si et seulement si il existe $\theta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mesurable telle que

$$Z = \theta(X).$$

Pour une autre variable aléatoire Y , on peut se demander ce qu'est la projection de Y sur $L^2(\sigma(X), \mathbf{P})$. C'est une variable aléatoire dont

l'utilisation est constante en probabilités : l'espérance conditionnelle, notée $\mathbf{E}[X | Y]$. Par définition de la projection

$$\mathbf{E} \left[|Y - \mathbf{E}[X | Y]|^2 \right] = \inf_{\theta \text{ mesurable}} \mathbf{E} \left[|Y - \theta(X)|^2 \right].$$

L'espérance conditionnelle de Y sachant X est donc la fonction de X la plus proche de Y au sens de la norme de $L^2(\mathbf{P})$. Calculons là dans un cas simple.

Soit X et Y deux variables aléatoire discrètes. On note

$$p_{X,Y}(x, y) = \mathbf{P}(X = x, Y = y), \quad p_X(x) = \mathbf{P}(X = x), \quad p_Y(y) = \mathbf{P}(Y = y).$$

D'après le théorème 7.11 et le lemme de Doob, la fonction θ doit être telle que pour toute fonction ψ

$$\mathbf{E}[(Y - \theta(X))\psi(X)] = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(Y - \theta(X))\psi(X)] &= \sum_x \sum_y (y - \theta(x))\psi(x)p_{X,Y}(x, y) \\ &= \sum_x \sum_y y\psi(x)p_{X,Y}(x, y) - \sum_x \sum_y \theta(x)\psi(x)p_{X,Y}(x, y) \\ &= \sum_x \psi(x) \left(\sum_y y p_{X,Y}(x, y) \right) - \sum_x \theta(x)\psi(x) \left(\sum_y p_{X,Y}(x, y) \right) \\ &= \sum_x \psi(x) \left(\sum_y y \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)} \right) p_X(x) - \sum_x \psi(x) \theta(x) p_X(x) \end{aligned}$$

Pour chaque $x \in \mathbf{N}$, on choisit la fonction qui vaut 1 en x et 0 ailleurs, donc

$$\theta(x) = \sum_y y \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)}.$$

On peut encore transformer un peu cette identité pour faire apparaître la bien connue probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \sum_y y \frac{\mathbf{P}(X = x, Y = y)}{\mathbf{P}(X = x)} \\ &= \sum_y y \mathbf{P}(Y = y | X = x). \end{aligned}$$

On note souvent

$$\theta(x) = \mathbf{E}[Y | X = x]$$

voire

$$\theta = \mathbf{E}[Y | X].$$

Ce résultat généralise de manière intuitive ce qui se passe dans \mathbf{R}^n mais il faut réaliser que c'est une propriété bien particulière des espaces de Hilbert. En effet, Lindenstrauss et Tzafriri ont montré en 1971, que tout espace vectoriel normé complet (dit de Banach) dans lequel tout sous-espace fermé a un supplémentaire topologique est forcément isomorphe à un espace de Hilbert. Cela signifie, par exemple, que certains sous espaces de l'ensemble des fonctions continues sur

Théorème 7.15 Tout sous-espace vectoriel fermé F d'un espace de Hilbert H admet un sous-espace vectoriel supplémentaire topologique : $H = F \oplus F^\perp$.

Démonstration. Si $x \in F \cap F^\perp$ alors $\langle x, x \rangle = 0$ donc $x = 0$. Ce qui signifie que F et F^\perp sont en somme directe.

Soit $x \in H$ et $p_F(x)$ son projeté sur F . On sait d'après le théorème 7.11 que $x - p_F(x) \in F^\perp$. On peut donc écrire

$$x = (x - p_F(x)) + p_F(x) \quad (7.11)$$

avec

$$x - p_F(x) \in F^\perp \text{ et } p_F(x) \in F.$$

On a donc montré que $H = F \oplus F^\perp$. ■

Théorème 7.16 Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace de Hilbert H ,

- 1) $\overline{F}^\perp = F^\perp$
- 2) $\overline{F} = F^{\perp\perp}$.
- 3) F est dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Démonstration. 1. Comme $F \subset \overline{F}$, on a forcément $\overline{F}^\perp \subset F^\perp$. Par ailleurs, si $y \in F^\perp$ alors $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout les $x \in F$ et par continuité du produit scalaire, cela est encore vrai pour $x \in \overline{F}$. Par conséquent, y appartient aussi à \overline{F}^\perp donc $\overline{F}^\perp = F^\perp$.

2. On sait que $x \in H$ s'écrit de manière unique

$$x = p_{\overline{F}}(x) + p_{(\overline{F})^\perp}(x) = p_{\overline{F}}(x) + p_{F^\perp}(x)$$

mais aussi, comme F^\perp est un espace-vectoriel fermé,

$$x = p_{F^\perp}(x) + p_{F^{\perp\perp}}(x).$$

Par unicité des décompositions, on a

$$p_{F^{\perp\perp}}(x) = p_{\overline{F}}(x).$$

Si $x \in \overline{F}$ alors cette identité devient

$$x = p_{F^{\perp\perp}}(x) \in F^{\perp\perp}$$

donc $\overline{F} \subset F^{\perp\perp}$. On procède de même si $x \in F^{\perp\perp}$ donc $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

3. Un ensemble F est dense si $\bar{F} = H$. D'autre part, $H^\perp = \{0\}$. En vertu des points précédents, on a donc

$$\begin{aligned}\bar{F} = H &\iff (\bar{F})^\perp = H^\perp \\ &\iff F^\perp = \{0\}.\end{aligned}$$

On a bien transformé un résultat d'existence de suite approchante en un critère simple à vérifier. ■

7.3 Séries de Fourier

Pour l'instant vous ne connaissez de fonctions que celles qui ont une expression en termes des fonctions dites élémentaires : sin, cos, fractions rationnelles, log, etc. mais dans la *vraie vie* les fonctions sont définies de façon implicite : solution d'une équation différentielle, solution d'une équation intégrale, minimum d'une fonctionnelle, etc. et l'on n'a que rarement une expression explicite en fonction des fonctions élémentaires. On cherche donc par tous les moyens à représenter ou au moins approcher ces fonctions par des fonctions que l'on connaît. Il se trouve que les polynômes se prêtent bien à approcher les fonctions continues mais que pour les fonctions moins régulières, ça marche beaucoup moins bien. La théorie des séries de Fourier permet d'approcher n'importe quelle fonction de carré intégrable (donc quelque chose de bien moins régulier que continue) par des sommes de sinus et de cosinus. C'était la motivation initiale de Joseph F. quand il s'est attaqué à l'équation de la chaleur. Ce n'est que bien longtemps après leur parution, quand le cadre de l'analyse fonctionnelle fut suffisamment mature, que sa théorie fut reconnue à sa juste valeur et généralisée à bien d'autres situations.

Soit H un espace de Hilbert. On est obligé d'introduire temporairement la notion de famille sommable pour un ensemble non nécessairement dénombrable d'éléments de H .

Définition 7.17 On dit qu'une famille $(x_n, n \in M)$ d'éléments de H est sommable s'il existe $x \in H$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M_0 \subset M$ fini tel que pour tout $I \supset M_0$ fini,

$$\|x - \sum_{n \in I} x_n\| \leq \varepsilon.$$

■ **Remarque 13** Soit M un ensemble fini et soit $(e_n, n \in M)$ un système orthonormal. L'application

$$\begin{aligned}P : H &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto \sum_{n \in M} \langle x, e_n \rangle_H e_n\end{aligned}$$

est la projection orthogonale sur $\text{vect}(e_n, n \in M)$. En effet, il est clair que $P \circ P = P$ et

$$\begin{aligned} \left\langle x - \sum_{n \in M} \langle x, e_n \rangle_H e_n, e_k \right\rangle_H \\ = \langle x, e_k \rangle_H - \left\langle \sum_{n \in M} \langle x, e_n \rangle_H e_n, e_k \right\rangle_H \\ = \langle x, e_k \rangle_H - \sum_{n \in M} \langle x, e_n \rangle_H \langle e_n, e_k \rangle_H = 0 \end{aligned}$$

donc $(\text{Id} - P)(x) \perp \text{vect}(e_n, n \in M)$. Par conséquent,

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in M} \langle x, e_n \rangle_H^2 + \|x - Px\|_H^2. \quad (7.12)$$

■

Théorème 7.18 — Procédé de Gram-Schmidt. Soit $(x_n, n \geq 1)$ une famille libre de H , il existe $(e_n, n \geq 1)$ famille de vecteurs orthonormaux telle que

$$\text{vect}\{x_n, n \geq 1\} = \text{vect}\{e_n, n \geq 1\}.$$

Démonstration. On prend

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|_H}.$$

Supposons construit (e_1, \dots, e_N) orthonormaux tels que

$$\text{vect}\{x_n, n \leq N\} = \text{vect}\{e_n, n \leq N\}.$$

On pose

$$u_{N+1} = x_{N+1} - \sum_{j=1}^N \langle x_{N+1}, e_j \rangle_H e_j.$$

On a à l'évidence, $u_{N+1} \perp e_n$ pour tout $n \leq N$ et comme x_{N+1} n'appartient pas à $\text{vect}\{x_n, n \leq N\}$, u_{N+1} n'est pas nul donc on peut considérer

$$e_{N+1} = \frac{u_{N+1}}{\|u_{N+1}\|_H}.$$

Par récurrence, on obtient la famille souhaitée. ■

■ **Exemple 7.5** Calculer la base orthonormalisée de \mathbf{R}^3 associée aux vecteurs

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

■

Exercice 7.1 On prend $H = \mathbf{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

- 1) Quelle est la base orthonormale associée aux vecteurs $(1, X, X^2, X^3)$?
- 2) En déduire

$$\inf_{a,b,c} \int_{-1}^1 (1 + a + bt + ct^2)^2 dt.$$

■

Exercice 7.2 Trouver une base orthonormale du sous-espace de \mathbf{R}^3 , défini par

$$V = \{(x, y, z), x + y + z = 0\}.$$

■

Définition 7.19 Soit (v_1, \dots, v_n) une famille libre de vecteurs de \mathbf{R}^p avec $p > n$. On appelle matrice de Gram de cette famille de vecteurs la matrice

$$G(v_1, \dots, v_n) = \left(\langle v_i, v_j \rangle, 1 \leq i, j \leq n \right)$$

Exercice 7.3 On pose $F = \text{vect}(v_1, \dots, v_n)$ et $a \in H$ alors

$$d(a, F)^2 = \frac{G(a, v_1, \dots, v_n)}{G(v_1, \dots, v_n)}.$$

■

Théorème 7.20 Soit $(e_n, n \in M)$ une famille d'éléments de H orthonormaux. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- 1) $\text{vect}\{e_n, n \in M\}$ est dense dans H ,
- 2) L'identité de Parseval est vérifiée : pour tout $x \in H$,

$$\|x\|_H^2 = \sum_{n \in M} \langle x, e_n \rangle_H^2 \quad (7.13)$$

au sens des familles sommables.

- 3) $x = \sum_{n \in M} \langle x, e_n \rangle_H e_n$ au sens des familles sommables.

Démonstration.

ÉTAPE 1. \implies 2. . Pour $x \in H$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble M_0 fini et un élément y de $\text{vect}\{e_n, n \in M_0\} := H_{M_0}$ tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon$.

Pour tout ensemble fini M contenant M_0 , $y \in H_M$ donc, en utilisant (7.12) et le théorème 7.11,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x\|^2 - \sum_{i \in M} |\langle x, e_i \rangle|^2 \\ &= \|x - P_M x\|^2 \\ &= \text{dist}(x, H_M)^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 \\ &\leq \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Par définition de la sommabilité, cela revient à dire que 2. est vérifié.

ÉTAPE 2. \Rightarrow 3.. Il vient aussi de (7.12) que pour tout M fini,

$$\|x - \sum_{i \in M} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i \in M} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Il s'ensuit très exactement la famille $(\langle x, e_i \rangle e_i, i \in \mathbf{N})$ est sommable, de somme x .

ÉTAPE 3. \Rightarrow 1.. C'est la définition de la sommabilité. ■

Définition 7.21 — Base orthonormée complète. Toute famille qui satisfait l'une des conditions équivalentes précédentes est appelée base orthonormée complète.

Définition 7.22 — Séparabilité. Un espace topologique est dit séparable s'il existe une famille dénombrable dense.

Définition 7.23 Tout espace de Hilbert séparable admet une base orthonormée complète.

Démonstration. Soit $(f_n, n \geq 1)$ une famille dense. En éliminant successivement les vecteurs liés, on obtient une famille libre $(g_n, n \geq 1)$ telle que l'adhérence de $\text{vect}(g_n, n \geq 1)$ soit H . En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à cette famille, on obtient une BONC. ■

Théorème 7.24 Soit $H = L^2([0, 2\pi]; \mathbf{C})$. La famille

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$$

pour k variant dans \mathbf{Z} est une BONC.

Démonstration. C'est trivialement une famille orthonormale. La remarque 3) suivant le théorème de Stone-Weierstrass assure que le point 1) du théorème 7.20 est vérifié. ■

■ **Remarque 14** Ce théorème signifie que toute fonction de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$ peut s'écrire au sens de L^2 comme limite de polynômes trigonométriques :

$$\begin{aligned} f(x) &= L^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{2\pi} f(u) e^{-iku} du \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \\ &= L^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} (f * e^{-ik\cdot})(x). \end{aligned}$$

■

■ **Remarque 15** On peut se servir de la formule de Parseval pour montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (7.14)$$

Prendre la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \pi[, \\ 0 & \text{si } t \in [-\pi, 0[. \end{cases} \quad (7.15)$$

On trouve

$$c_0(f) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ et } c_k(f) = \frac{1 - (-1)^k}{i\sqrt{2\pi}k} \text{ pour } k \in \mathbf{Z}^*.$$

Compte tenu des symétries, l'égalité de Parseval donne

$$\int_0^{\pi} f(t)^2 dt = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Or

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

d'où le résultat. ■

■ **Remarque 16** On peut opérer des opérations élémentaires sur les fonctions f qui se traduisent par des transformations encore plus simples sur les coefficients de Fourier. Soit α une constante,

$$c_0(f + \alpha) = c_0(f) + \alpha\sqrt{2\pi} \text{ et } c_n(f + \alpha) = c_n(f), \quad \forall n \neq 0.$$

D'autre part, de façon évidente

$$c_n(\alpha f) = \alpha c_n(f).$$

Par conséquent si on considère la fonction

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } x \in [0, \pi[, \end{cases} \quad (7.16)$$

on voit que

$$g(x) = 2\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 2f(x) - 1$$

où f a été définie en (7.15). Par conséquent,

$$c_0(g) = 0 \text{ et } c_n(g) = 2c_n(f) = \frac{4}{i\sqrt{2\pi}k} \text{ si } k \text{ impair.}$$

Au sens L^2 , on a donc

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k \text{ impair}} \frac{4}{i\sqrt{2\pi}k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \\ &= \frac{2}{i\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(e^{i(2k+1)t} - e^{-(2k+1)t} \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)t). \end{aligned}$$

On pose

$$S_N(g) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)t)$$

et on regarde comment $S_N(g)$ converge vers g .

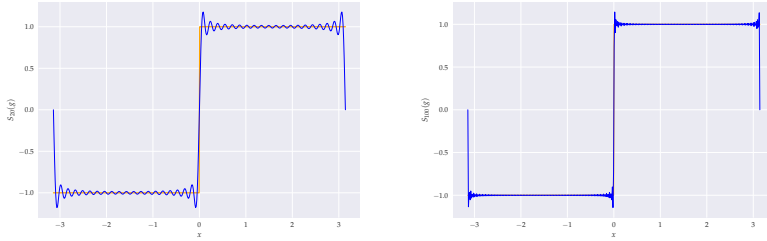


FIGURE 7.2: $S_{20}(g)$ à gauche et $S_{100}(g)$ à droite

On voit qu'au milieu de l'intervalle $[0, \pi]$ (et de même par imparité de l'autre côté de 0), l'approximation s'est bien améliorée avec l'augmentation du nombre de termes. En revanche, au voisinage de 0, la courbe de $S_n(g)$ est largement chahutée. Ces oscillations appelées *phénomène de Gibbs* sont symptomatiques de la non convergence uniforme de $S_n(g)$ vers g . En revanche, si l'on calcule $\|S_N(g) - g\|_{L^2}$, on obtient les valeurs du tableau 7.1, ce qui signifie bien qu'en norme de L^2 , il y a convergence. On a donc un exemple d'un cas où la convergence L^2 n'implique pas la convergence dans L^∞ donc que les distances associées ne sont pas équivalentes.

■

N	$-\log_{10} \ S_N(g) - g\ _{L^2}$
20	1,2
200	2,1
2 000	2,8
20 000	3,2

TABLE 7.1: Convergence de $S_N(g)$ vers g dans L^2

Soit $f \in L^2([0, 2\pi])$, on note I^1 l'application *primitive première* :

$$(I^1 f)(t) = \int_0^t f(u) \, du.$$

Théorème 7.25 Soit $f \in L^2([0, 2\pi])$, l'application

$$\begin{aligned} I^1 : L^2([0, 2\pi]) &\longrightarrow \mathcal{C}([0, 2\pi]; \mathbb{C}) \\ f &\longmapsto I^1 f \end{aligned}$$

est continue. Si f est à moyenne nulle, c'est-à-dire

$$c_0(f) = 0 \text{ ou de manière équivalente } \int_0^{2\pi} f(t) \, dt = 0$$

alors le développement en série de Fourier de $I^1 f$ est donné par l'intégration terme à terme de celui de f :

$$(I^1 f)(t) = \int_0^{2\pi} I^1(f)(u) \, du + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{in} c_n(f) e_n(t).$$

Enfin, la série

$$S_N(I^1 f) = c_0(f) + \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \frac{1}{in} c_n(f) e_n(t)$$

converge dans \mathcal{C} , i.e. la convergence de la série de Fourier de f est uniforme sur $[0, 2\pi]$.

Démonstration. On a

$$I^1 f(t) - I^1 f(s) = \int_s^t f(u) \, du = \int_0^1 \mathbf{1}_{[s, t]}(u) f(u) \, du.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |I^1 f(t) - I^1 f(s)| &\leq \left(\int_0^1 \mathbf{1}_{[s, t]}(u)^2 \, du \right)^{1/2} \left(\int_0^1 f(u)^2 \, du \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{t-s} \|f\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Par conséquent, $I^1 f$ est uniformément continue donc continue. En appliquant (7.17) à $s = 0$, on obtient

$$|I^1 f(t)| \leq \sqrt{t} \|f\|_{L^2}$$

soit

$$\|I^1 f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |I^1 f(t)| \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_{L^2},$$

ce qui signifie que I^1 est continue de L^2 dans \mathcal{C} .

On a aussi

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt \leq \|f\|_\infty^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \|f\|_\infty^2$$

soit

$$\|f\|_{L^2} \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_\infty.$$

Ceci signifie que l'application, qui est en fait l'injection canonique,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\longrightarrow L^2 \\ f &\longmapsto f \end{aligned}$$

est continue. Par composition de fonctions, I^1 est donc continue de L^2 dans lui-même. En particulier, $I^1 f$ est un élément de L^2 donc on peut calculer son développement en série de Fourier.

Pour simplifier les calculs, on suppose que f est de moyenne nulle. D'après le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} I^1 f(t) e^{-int} dt &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^t f(u) du \right) e^{-int} dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(u) \left(\int_u^{2\pi} e^{-int} dt \right) du \\ &= \int_0^{2\pi} f(u) \frac{-1}{in} (1 - e^{-inu}) du \\ &= \frac{1}{in} c_n(f). \end{aligned}$$

D'après l'égalité de Parseval,

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)|^2 < \infty$$

on a

$$c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Autrement dit,

$$\frac{1}{|n|} |c_n(f)| = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Considérons maintenant les restes de Cauchy des sommes partielles du développement en série de Fourier de $I^1 f$:

$$\sum_{|k|=M}^N c_k(I^1 f) e^{ikt}.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, on a

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{|k|=M}^N c_k(I^1 f) e^{ikt} \right|^2 &= \left| \sum_{|k|=M}^N |k|^{1/2+\epsilon/2} c_k(I^1 f) \frac{e^{ikt}}{|k|^{1/2+\epsilon/2}} \right|^2 \\
 &\leq \left(\sum_{|k|=M}^N |k|^{1+\epsilon} c_k(I^1 f)^2 \right) \left(\sum_{|k|=M}^N \frac{1}{|k|^{1+\epsilon}} \right) \\
 &\leq 2\zeta(1+\epsilon) \sum_{|k|=M}^N |k|^{1+\epsilon} \frac{c_k(f)^2}{k^2} \\
 &\leq \frac{2\zeta(1+\epsilon)}{M^{1-\epsilon}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(f)^2 \\
 &= \frac{2\zeta(1+\epsilon)}{M^{1-\epsilon}} \|f\|_{L^2}^2,
 \end{aligned}$$

où $\zeta(\alpha)$ est la fonction Zêta de Riemann, i.e. la somme de la série de terme général $n^{-\alpha}$. Le reste de Cauchy des sommes partielles tend uniformément vers 0 quand M et N tendent vers l'infini donc la série

$$S_N(f) = \sum_{|k| \leq N} c_k(I^1 f) e^{ikt}$$

est uniformément convergente, nécessairement vers $I^1 f$. ■

✎ D'après l'égalité de Parseval, une fonction f de carré intégrable a des coefficients de Fourier qui tendent vers 0. Le théorème 7.25 indique qu'une fonction f à variation quadratique finie, i.e. primitive d'une fonction de carré intégrable, a des coefficients qui tendent vers 0 plus vite que $1/n$. Si l'on itère le procédé, on voit qu'en primitivant k fois une fonction de carré intégrable, on obtient une fonction dont les coefficients de Fourier tendent vers 0 plus vite que $1/n^k$. En particulier, les fonctions de classe C^k sur $[0, 2\pi]$ s'écrivent comme cela donc le développement en série de Fourier transforme la régularité d'une fonction en intégrabilité de ses coefficients de Fourier. On a même une réciproque à cette remarque.

Définition 7.26 Pour $s \in \mathbf{R}^+$, on note ℓ_s^2 l'ensemble des suites

$$\ell_s^2 = \left\{ u \in \mathbf{C}^{\mathbf{Z}}, \sum_{k \in \mathbf{Z}} (1 + |k|^2)^s |u_k|^2 < +\infty \right\}.$$

On introduit l'espace de Sobolev fractionnaire :

$$H^s = \left\{ f \in L^2, (c_k(f), k \in \mathbf{Z}) \in \ell_s^2 \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{H^s}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |c_k(f)|^2.$$

Théorème 7.27 Si $s > 1/2$ alors $H^s \subset \text{Hol}(s - \frac{1}{2})$.

Démonstration. On se contentera de la preuve de la continuité car la preuve de la régularité Hölder est bien plus technique. On reprend la même stratégie que dans la fin de la preuve du théorème 7.25. On a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|k|=M}^N c_k(I^1 f) e^{ikt} \right|^2 &= \left| \sum_{|k|=M}^N (1 + |k|^2)^{s/2} c_k(f) \frac{e^{ikt}}{(1 + |k|^2)^{s/2}} \right|^2 \\ &\leq \left(\sum_{|k|=M}^N (1 + |k|^2)^s |c_k(f)|^2 \right) \left(\sum_{|k|=M}^N (1 + |k|^2)^{-s} \right) \\ &\leq 2 \|f\|_{H^s}^2 \sum_{|k|=M}^N (1 + |k|^2)^{-s}. \end{aligned}$$

Pour $s > 1/2$, la série de droite est du même ordre que le reste de Cauchy de $\zeta(2s)$ donc tend vers 0 quand M et N tendent vers l'infini. Par conséquent $S_N(f)$ converge uniformément vers f , qui est donc continue. ■

■ **Exemple 7.6** Continuons l'exemple de la fonction g définie en (7.16). La primitive de g est la fonction valeur absolue. La convergence uniforme se voit tout de suite. Pour $N = 20$, la courbe représentative de $S_{20}(|x|)$ est indistinguable de celle de $(x \mapsto |x|)$. Il faut vraiment zoomer pour voir qu'au voisinage de la singularité (i.e. autour de 0), il y a de petites différences, voir Figure 7.3. ■

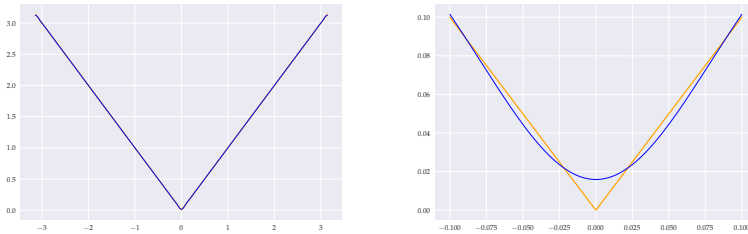


FIGURE 7.3: À gauche, les graphes de $S_{20}(|x|)$ et de $|x|$ sur $[-\pi, \pi]$. À droite, le zoom sur $[-0.1, 0.1]$.

La théorie des séries de Fourier est avant tout une théorie hilbertienne mais on peut toutefois se demander ce qui se passe au niveau de la convergence ponctuelle des sommes partielles.

Considérons le noyau

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right). \quad (7.18)$$

Si x n'est pas un multiple de 2π alors

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

et si x est un multiple de 2π alors $D_n(x) = \frac{2n+1}{2\pi}$.

À partir de la représentation comme somme, on voit facilement que

$$\int_0^{2\pi} D_n(x) \, dx = 1.$$

D'autre part les représentations successives de D_n pour différentes valeurs de n montrent que D_n est quasiment nul en dehors des voisinages de 0 et 2π , voir figure 7.4. Il ressemble donc à une approximation de l'identité. Compte-tenu des propriétés régularisantes de la convolution, on peut donc espérer des théorèmes de convergence plus précis pour des fonctions un peu plus régulières que seulement de carré intégrable. C'est l'objet du théorème de Dirichlet.

Théorème 7.28 — Théorème de Dirichlet. Soit f 2π -périodique, de classe C^1 par morceaux. La suite des sommes partielles

$$S_n(f)(x) = f * D_n(x)$$

converge simplement vers

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-)).$$

De plus, sur tout intervalle compact constitué de points de continuité de la fonction et de sa dérivée, la convergence (vers f) est uniforme.

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme de Riemann-Lebesgue

Lemme 7.29 — Riemann-Lebesgue. Soit $f \in L^1([0, 2\pi])$.

$$\int_0^{2\pi} f(t) e^{int} \, dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. Pour f fonction indicatrice d'un intervalle $[a, b]$,

$$\int_0^{2\pi} f(t) e^{int} \, dt = \int_a^b e^{int} \, dt = \frac{1}{in} (e^{inb} - e^{ina}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Soit \mathfrak{C} l'ensemble des intervalles de $[0, 2\pi]$. C'est un π -système qui engendre $\mathcal{B}([0, 2\pi])$.

$$\mathfrak{D} = \left\{ A \in \mathcal{B}([0, 2\pi]), \int_0^{2\pi} \mathbf{1}_A(t) e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}.$$

Si $A_k \uparrow A$,

$$\left| \int_0^{2\pi} \mathbf{1}_A(t) e^{int} dt \right| \leq \left| \int_0^{2\pi} \mathbf{1}_{A_k}(t) e^{int} dt \right| + \lambda(A \setminus A_k).$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, le théorème de convergence monotone permet de choisir k tel que le dernier terme soit inférieur à ε . Pour cette valeur de k , on sait que le premier terme est inférieur à ε pour n assez grand. Par conséquent, \mathfrak{D} est un λ -système. Par classe monotone,

$$\sigma(\mathfrak{C}) = \mathcal{B}([0, 2\pi]) \subset \mathfrak{D}.$$

Ce qui signifie que le résultat est vrai pour les fonctions indicatrices de boréliens. Par linéarité, on peut étendre ce résultat aux fonctions étagées. Or celles-ci sont denses dans L^1 . Soit $\varepsilon > 0$ et f_ε étagée telle que

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - f_\varepsilon(t)| dt \leq \varepsilon.$$

Si n est tel que

$$\left| \int_0^{2\pi} f_\varepsilon(t) e^{int} dt \right| \leq \varepsilon$$

alors

$$\left| \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} dt \right| \leq 2\varepsilon.$$

D'où le résultat. ■

Preuve du théorème 7.28. Pour utiliser la parité de D_n , on travaille sur $[-\pi, \pi]$ plutôt que sur $[0, 2\pi]$. Comme D_n est d'intégrale 1,

$$f * D_n(x) - \tilde{f}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt - \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) D_n(t) dt.$$

Comme D_n est paire,

$$\int_{-\pi}^0 f(x-t) D_n(t) dt = \int_0^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f * D_n(x) - \tilde{f}(x) &= \int_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t) - 2\tilde{f}(x)) D_n(t) dt \\ &= \int_0^{\pi} (f(x-t) - f(x^-)) D_n(t) dt + \int_0^{\pi} (f(x+t) - f(x^+)) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

Considérons le premier terme,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (f(x-t) - f(x^-)) D_n(t) dt \\ = \int_0^\pi \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t} \frac{t}{\sin(t/2)} \sin((n + \frac{1}{2})t) dt. \end{aligned}$$

Comme f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, la fonction

$$t \mapsto \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t}$$

est continue sur $]0, \pi]$ et est prolongeable par continuité en 0 donc elle est bornée et intégrable. De même pour la fonction $t/\sin(t/2)$. D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, le premier terme tend vers 0. On procède de même pour le deuxième terme.

La preuve de la convergence uniforme est plus technique et se trouve dans tous les livres de prépa. ■

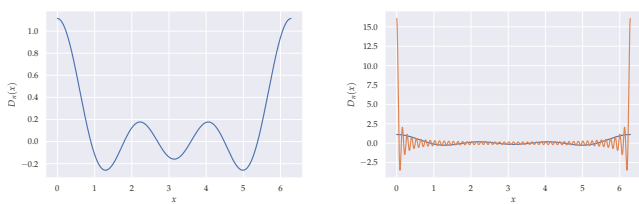


FIGURE 7.4: Noyau de Dirichlet pour $n = 3$ (à gauche) et $n = 3$ et $n = 50$ (droite).

7.4 Dualité

Quand $H = \mathbf{R}^n$, on sait qu'une forme linéaire est de la forme

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \langle a, x \rangle$$

avec $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. On veut maintenant montrer que si H est un espace de Hilbert, ce résultat reste valable.

Théorème 7.30 — Théorème de représentation de Riesz. Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $f \in H'$, il existe un unique élément $x \in H$ tel que

$$f(y) = \langle x, y \rangle_H, \quad \forall y \in H.$$

De plus,

$$\|f\|_{H'} = \|x\|_H.$$

✎ Ce théorème signifie que l'on peut construire un isomorphisme isométrique entre un Hilbert et son dual. Deux espaces qui possèdent une telle relation ne peuvent pas être plus semblables, on prend donc souvent la convention d'identifier un espace de Hilbert et son dual.

Démonstration. On suppose que $f \neq 0$, sinon il n'y a rien à prouver. Comme f est une application continue de H dans \mathbf{R} , son noyau $\ker f$ est aussi l'image réciproque de $\{0\}$, qui est un fermé de \mathbf{R} . Par conséquent

$\ker f$ est un sous-espace vectoriel (comme tout noyau d'application linéaire) fermé, on peut considérer son orthogonal et écrire

$$H = \ker f \oplus (\ker f)^\perp$$

Soit $z' \in (\ker f)^\perp$ et $z = z' / \|z'\|_H$. Pour $y \in H$, on pose

$$\xi_y = f(z)y - f(y)z.$$

Il est immédiat que

$$f(\xi_y) = f(z)f(y) - f(y)f(z) = 0 \text{ donc } \xi_y \in \ker f.$$

Comme $z \in (\ker f)^\perp$, on a d'une part

$$\langle \xi_y, z \rangle = 0$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \langle \xi_y, z \rangle &= \langle f(z)y - f(y)z, z \rangle \\ &= f(z)\langle y, z \rangle - f(y)\|z\|_H^2. \end{aligned}$$

Comme z est de norme 1, on obtient

$$f(y) = \langle y, f(z)z \rangle$$

donc

$$x = f(z)z$$

convient.

D'autre part, si x et x' conviennent tous deux, alors pour tout $y \in H$,

$$\langle x, y \rangle = \langle x', y \rangle \iff \langle x - x', y \rangle = 0 \iff x - x' \in H^\perp = \{0\},$$

soit $x = x'$, d'où l'unicité.

Enfin, par définition

$$\|f\|_{H'} = \sup_{\|y\|_H \leq 1} |f(y)|.$$

Compte-tenu de la représentation que nous venons de trouver

$$|f(y)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_H \|y\|_H$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il s'ensuit que

$$\|f\|_{H'} \leq \|x\|_H.$$

En prenant $y = x / \|x\|$, on voit que

$$f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, x \right\rangle_H = \|x\|_H$$

et donc que le supremum définissant la norme est atteint. On en conclut que $\|f\|_{H'} = \|x\|_H$. ■

Les applications de ce théorème sont extrêmement nombreuses. Commençons par la notion d'opérateur adjoint.

Théorème 7.31 Soit H et F deux espaces de Hilbert et A linéaire, continue de H dans F : il existe $c > 0$ tel que

$$\|Ax\|_F \leq c \|x\|_H, \quad \forall x \in H. \quad (7.19)$$

Il existe une unique application linéaire continue, notée A^* , de F dans H telle que

$$\langle Ax, y \rangle_F = \langle x, A^*y \rangle_H.$$

A^* est appelé l'opérateur adjoint de A .

Démonstration. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans F ,

$$|\langle Ax, y \rangle_F| \leq \|Ax\|_F \|y\|_F$$

et en vertu de (7.19),

$$|\langle Ax, y \rangle_F| \leq c \|x\|_H \|y\|_F,$$

que l'on peut interpréter comme la preuve que pour tout $y \in F$, la forme linéaire

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \langle Ax, y \rangle_F \end{aligned}$$

est continue, donc un élément de H' . Il existe donc un unique $z_y \in H$ tel que

$$\langle Ax, y \rangle_F = \langle x, z_y \rangle_H.$$

Si l'on remplace y par $y + w$, on a d'une part

$$\langle Ax, y + w \rangle_F = \langle x, z_{y+w} \rangle_H$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \langle Ax, y + w \rangle_F &= \langle Ax, y \rangle_F + \langle Ax, w \rangle_F \\ &= \langle x, z_y \rangle_H + \langle x, z_w \rangle_H \\ &= \langle x, z_y + z_w \rangle_H. \end{aligned}$$

Donc

$$\langle x, z_{y+w} - z_y + z_w \rangle_H = 0, \quad \forall x \in H,$$

donc $x = z_{y+w} - z_y + z_w$ appartient à H^\perp donc il est nul, i.e.

$$z_{y+w} = z_y + z_w.$$

On procède de même pour αy pour montrer que $z_{\alpha y} = \alpha z_y$. Par conséquent, l'application

$$\begin{aligned} F &\longrightarrow H \\ y &\longmapsto z_y \end{aligned}$$

est linéaire et on note $z_y = A^*y$. D'après la propriété d'isométrie du théorème de représentation de Riesz,

$$\|A^*y\|_H = \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle Ax, y \rangle|}{\|x\|_H} \leq \|A\| \frac{\|x\|_H \|y\|_F}{\|x\|_H} = \|A\| \|y\|_F$$

donc A^* est continu et $\|A^*\| \leq \|A\|$. Comme il est évident que $A^{**} = A$, on a

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

■

■ **Exemple 7.7** On sait, et cela se vérifie facilement, que l'opérateur adjoint dans \mathbf{R}^n pour le produit scalaire ordinaire, a pour matrice la transposée de la matrice de l'opérateur initial.

Regardons maintenant ce qui se passe si on considère une matrice S symétrique définie positive et que l'on prend comme produit scalaire

$$(x, y) = \langle Sx, y \rangle$$

où le produit scalaire entre $\langle \rangle$ est le produit scalaire usuel sur \mathbf{R}^n . Soit A un opérateur linéaire de \mathbf{R}^n dans lui-même représenté par sa matrice aussi notée A dans une base donnée. On a d'une part

$$(Ax, y) = \langle S Ax, y \rangle = \langle x, (SA)^t y \rangle$$

et d'autre part

$$(Ax, y) = (x, A^*y) = \langle Sx, A^*y \rangle = \langle x, S^t A^*y \rangle.$$

Comme ces deux égalités sont vraies pour tout x, y , on a nécessairement

$$(SA)^t = S^t A^* \implies A^* = (S^{-1})^t A^t S^t = (SAS^{-1})^t.$$

■

■ **Exemple 7.8** Soit K une application de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans \mathbf{R} telle que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty K(x, y)^2 dx dy < \infty.$$

On considère l'opérateur

$$\begin{aligned} A : L^2([0, 1]) &\longrightarrow L^2([0, 1]) \\ f &\longmapsto (x \mapsto \int_0^1 K(x, y) f(y) dy) \end{aligned}$$

Son adjoint est l'opérateur

$$\begin{aligned} A^* : L^2([0, 1]) &\longrightarrow L^2([0, 1]) \\ f &\longmapsto (y \mapsto \int_0^1 K(x, y) f(x) dx) \end{aligned}$$

■

On trouve une autre application fondamentale du théorème de représentation de Riesz dans le théorème de Radon-Nikodym.

Définition 7.32 Soit μ_1 et μ_2 deux mesures sur (E, \mathcal{E}) . La mesure μ_2 est absolument continue par rapport à μ_1 lorsque

$$A \in \mathcal{E} \text{ et } \mu_1(A) = 0 \implies \mu_2(A) = 0.$$

On note $\mu_2 \ll \mu_1$.

Théorème 7.33 Soit μ_1 et μ_2 deux mesures finies sur un espace (E, \mathcal{E}) . La mesure μ_2 est absolument continue par rapport à μ_1 , si et seulement si il existe h positive, mesurable de (E, \mathcal{E}) dans $(\mathbf{R}^+, \mathcal{B}(\mathbf{R}^+))$ telle que pour tout g mesurable bornée,

$$\int g(x) \, d\mu_2(x) = \int h(x)g(x) \, d\mu_1(x). \quad (7.20)$$

La fonction f est habituellement notée

$$f(x) = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x)$$

et (7.20) devient alors

$$\int g(x) \, d\mu_2(x) = \int g(x) \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x) \, d\mu_1(x).$$

Démonstration. ÉTAPE 1. Soit $\rho = \mu_1 + \mu_2$ et g dans $L^2(E, \mathcal{E}, \mu_2)$. L'application

$$g \longmapsto \int_E g \, d\mu_2$$

est continue de $L^2(E, \mathcal{E}, \rho)$ dans \mathbf{R} : d'après Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \left| \int_E g \, d\mu_2 \right| &\leq \mu_2(E)^{1/2} \left(\int_E g^2 \, d\mu_2 \right)^{1/2} \\ &\leq \mu_2(E)^{1/2} \left(\int_E g^2 \, d\rho \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Riesz, il existe donc f telle que

$$\int_E g \, d\mu_2 = \int_E fg \, d\rho. \quad (7.21)$$

En particulier, pour g fonction indicatrice d'un ensemble A on obtient

$$\int_A f \, d\rho = \mu_2(A) \geq 0. \quad (7.22)$$

ÉTAPE 2. Pour $A = \{x : f(x) < 0\}$, $\mathbf{1}_A f$ est une fonction négative ou nulle donc d'une part

$$0 \geq \int_A f \, d\rho$$

et en vertu de (7.22)

$$\int_A f \, d\rho \geq 0.$$

Il s'ensuit que

$$\int_E f \mathbf{1}_A \, d\rho = 0$$

et comme $f \mathbf{1}_A$ est de signe constant, $f \mathbf{1}_A = 0$ ρ -presque partout. Comme $f \neq 0$ sur A , nécessairement $\rho(A) = 0$.

ÉTAPE 3. En choisissant $B = \{x : f(x) \geq 1\}$, on obtient

$$\mu_2(B) = \int_B d\mu_2 = \int_B f \, d\mu_2 + \int_B f \, d\mu_1 \geq \mu_2(B) + \mu_1(B)$$

donc $\mu_1(B) = 0$ et comme, par hypothèse, $\mu_2 \ll \mu_1$, on en déduit $\mu_2(B) = 0$ d'où $\rho(B) = 0$.

ÉTAPE 4. La fonction f est donc dans la même classe d'équivalence que la fonction \tilde{f} définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 < f(x) < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Réécrivons alors l'identité (7.21) avec \tilde{f}

$$\begin{aligned} \int_E g \, d\mu_2 &= \int_E g \tilde{f} \, d\rho \\ &= \int_E g \tilde{f} \, d\mu_1 + \int_E g \tilde{f} \, d\mu_2 \\ &= \int_E g \tilde{f} \, d\mu_1 + \int_E g \tilde{f}^2 \, d\rho \\ &= \int_E g \sum_{k=1}^n \tilde{f}^k \, d\mu_1 + \int_E g \tilde{f}^{n+1} \, d\rho. \end{aligned}$$

Comme $|\tilde{f}| < 1$, on peut poser

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}^k(x) = \frac{1}{1 - \tilde{f}(x)}. \quad (7.23)$$

Par convergence monotone et convergence dominée, on a

$$\int_E g \, d\mu_2 = \int_E g h \, d\mu_1, \text{ pour } g \text{ bornée.}$$

ÉTAPE 5. La réciproque est immédiate. ■

On peut sans souci étendre ce résultat aux mesures σ -finies, c'est-à-dire les mesures qui sont finies sur tout ensemble compact, à l'instar de la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R} . Dans le cours de probabilités, quand vous parlerez de *lois à densité*, il sera sous-entendu que l'on parle d'absolue continuité par rapport à la mesure de Lebesgue mais on pourrait tout à fait considérer les mesures de probabilités absolument continues par rapport à d'autres lois.

Exercice 7.4 Quelles sont les mesures de probabilités absolument continues par rapport à la mesure de Poisson définie par

$$\mu_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n ?$$

■

8

Introduction à la classification

8.1 Espaces auto-reproduisants

Les espaces de Hilbert dits auto-reproduisants apparaissent souvent en probabilités et donc statistiques parce qu'ils sont en fait les espaces de covariance associés aux processus gaussiens.

L'espace $L^2(\mathbf{R}^n; \mathbf{C})$ est l'espace des fonctions mesurables à valeurs dans \mathbf{C} de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^n ,

$$L^2(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}) = \{f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}, \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2 dx_1 \dots dx_n < \infty\}.$$

Le produit scalaire est donné par

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Stricto sensu, $\langle f, f \rangle = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque-partout et pas forcément partout. On est donc normalement amené à identifier entre elles, les fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle. À ce titre, la fonction indicatrice de \mathbf{Q} est identifiée à la fonction nulle. Cela implique que l'application « évaluation en x », notée δ_x :

$$\begin{aligned} \delta_x : L^2 &\longrightarrow \mathbf{C} \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

n'est même pas définie puisque suivant le « représentant » que l'on choisit, la valeur peut varier. Pour la fonction nulle, $\delta_0(0) = 0$ tandis que $\delta_0(\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}) = 1$.

Les espaces de Hilbert à noyaux auto-reproduisants sont une classe particulière d'espace de Hilbert pour lesquels les fonctions *évaluation* sont non seulement définies, mais aussi continues.

Soit E un espace abstrait et \mathcal{H} un espace de fonctions définies sur E à valeurs dans \mathbf{C} , que l'on munit d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ qui en fait un espace de Hilbert.

■ **Exemple 8.1** Si $E = \{1, \dots, n\}$, \mathcal{H} est un ensemble de fonctions de $\{1, \dots, n\}$ dans \mathbf{C} donc on peut l'identifier au vecteur $(f(1), \dots, f(n))$. Ce qui signifie que \mathcal{H} peut être vu comme \mathbf{C}^n .

Si $E = \mathbf{N}$, \mathcal{H} est l'ensemble des suites de complexes. Reste à lui définir un produit scalaire. ■

Définition 8.1 Une fonction $K : E \times E \longrightarrow \mathbf{C}$ est un noyau auto-reproduisant lorsque

- a) Pour tout $t \in E$, $K(t, \cdot) \in \mathcal{H}$
- b) Pour tout $t \in E$, pour tout $h \in \mathcal{H}$,

$$h(t) = \langle h, K(t, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}}.$$

En particulier,

$$K(t, s) = \langle K(t, \cdot), K(s, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}} \quad (8.1)$$

Un espace de Hilbert qui possède un noyau auto-reproduisant s'appelle un RKHS pour *Reproducing Kernel Hilbert Space*.

■ **Exemple 8.2** Si \mathcal{H} est de dimension finie, il possède une BONC $(e_k, k = 1, \dots, n)$. \mathcal{H} admet un noyau auto-reproduisant :

$$K(x, y) = \sum_{m=1}^n \overline{e_m(x)} e_m(y).$$

C'est-à-dire que

$$K(x, \cdot) = \sum_{m=1}^n \overline{e_m(x)} e_m.$$

Si $\varphi \in \mathcal{H}$ alors φ s'écrit $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ donc

$$\begin{aligned} \langle \varphi, K(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \sum_{m=1}^n \overline{e_m(x)} e_m \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \lambda_k \overline{e_m(x)} \langle e_k, e_m \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k(x) \\ &= \varphi(x). \end{aligned}$$

On a donc bien montré la propriété d'*auto-reproduction*. ■

■ **Exemple 8.3** On verra plus tard que $L^2(\mathbf{R}; \mathbf{C})$ ne peut pas être vu comme un RKHS par contre l'espace de Sobolev $W^{1,2}$ (ou espace de Cameron-Martin) le peut.

Définition 8.2 Une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est dite absolument continue s'il existe \dot{f} intégrable sur tout compact telle que

$$f(t) = \int_0^t \dot{f}(s) \, ds.$$

On admet que \dot{f} est unique.

■ **Exemple 8.4** Par exemple, la fonction $f : (t \mapsto |t|)$ est absolument continue sans être dérivable avec

$$\dot{f}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \geq 0 \\ -1 & \text{si } s < 0. \end{cases}$$

Définition 8.3 — Espace de Cameron-Martin. L'espace $W^{1,2}([0,1])$ est l'espace des fonctions absolument continues dont la « dérivée faible » est de carré intégrable :

$$\{f, \int_0^1 \dot{f}(s)^2 \, ds < \infty\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{W^{1,2}} = \int_0^1 \dot{f}(s) \dot{g}(s) \, ds.$$

Théorème 8.4 La fonction

$$K(s, t) = \min(s, t)$$

est un noyau auto-reproduisant pour $W^{1,2}([0,1])$.

Démonstration. En effet, remarquons que

$$\min(s, t) = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,t]}(r) \mathbf{1}_{[0,s]}(r) \, dr$$

donc

$$s \mapsto K(t, s) = \int_0^s \mathbf{1}_{[0,t]}(r) \, dr.$$

Ceci signifie que

$$(K(t, \cdot))' = \mathbf{1}_{[0,t]}.$$

Par conséquent,

$$\langle f, K(t, \cdot) \rangle_{W^{1,2}} = \int_0^1 \dot{f}(s) \mathbf{1}_{[0,t]}(s) \, ds = \int_0^t \dot{f}(s) \, ds = f(t).$$

■

Théorème 8.5 — Théorème de Aronszajn. Un espace de Hilbert \mathcal{H} est un RKHS si et seulement si toutes les fonctions évaluations $(\delta_x, x \in E)$ sont continues de \mathcal{H} dans \mathbf{C} : pour tout $x \in E$, il existe une constante $c_x > 0$ dépendant de x telle que pour toute $f \in \mathcal{H}$,

$$|f(x)| \leq c_x \|f\|_{\mathcal{H}}. \quad (8.2)$$

Démonstration.

\Rightarrow Comme \mathcal{H} est supposé être un RKHS,

$$f(x) = \langle f, K(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}}.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz d'où

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \|K(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}}.$$

Il suffit de poser $c_x = \|K(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}}$.

\Leftarrow L'hypothèse signifie que pour tout $x \in E$, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue. Le théorème de représentation de Riesz implique alors qu'il existe un unique $\theta_x \in \mathcal{H}$ tel que

$$f(x) = \langle f, \theta_x \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Par conséquent,

$$K(x, y) = \theta_x(y)$$

est un noyau auto-reproduisant pour \mathcal{H} . ■

Corollaire 8.6 Dans un RKHS, toute suite de fonctions qui converge dans \mathcal{H} converge ponctuellement :

$$\left(f_n \xrightarrow[\mathcal{H}]{n \rightarrow \infty} f \right) \Rightarrow \left(\forall x \in E, f_n(x) \xrightarrow[\mathbf{C}]{n \rightarrow \infty} f(x) \right).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |\delta_x(f_n - f)| \\ &\leq \|K(x, \cdot)\|_{\mathcal{H}} \|f_n - f\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

en vertu de (8.2). ■

Il reste à savoir comment construire un noyau auto-reproduisant. C'est ce que nous allons faire maintenant.

Définition 8.7 Une fonction $K : E \times E \rightarrow \mathbf{C}$ est de type positif lorsque pour tout $n \geq 1$, pour tous les ensembles de points (x_1, \dots, x_n) de E , on a

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n K(x_k, x_j) a_k \overline{a_j} \geq 0$$

pour toute famille (a_1, \dots, a_n) de nombres complexes.

Cela signifie en particulier que pour tout (x_1, \dots, x_n) de E , la matrice

$$(K(x_i, x_j), 1 \leq i, j \leq n)$$

est symétrique (hermitienne dans le cas complexe) positive.

Il n'est pas simple de déterminer si une fonction est de type positif. Le moyen le plus simple est donné par le lemme suivant.

Lemme 8.8 S'il existe un espace de Hilbert \mathcal{G} et une fonction $\phi : E \rightarrow \mathcal{G}$ tels que

$$K(x, y) = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle_{\mathcal{G}} \quad (8.3)$$

alors K est de type positif.

Démonstration. Il suffit de calculer

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n a_j \phi(x_j) \right\|_{\mathcal{G}}^2 &= \left\langle \sum_{j=1}^n a_j \phi(x_j), \sum_{m=1}^n a_m \phi(x_m) \right\rangle_{\mathcal{G}} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n a_j \overline{a_m} \langle \phi(x_j), \phi(x_m) \rangle_{\mathcal{G}} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n a_j \overline{a_m} K(x_j, x_m) \end{aligned}$$

qui est donc positif pour toutes les familles (a_1, \dots, a_n) de nombres complexes. ■

Lemme 8.9 Un noyau auto-reproduisant est une fonction de type positif.

Démonstration. D'après (8.1), on peut prendre $\phi(x) = K(x, \cdot)$ et $\mathcal{G} = \mathcal{H}$ pour que (8.3) soit satisfaite. ■

Le théorème suivant donne une réciproque à ce lemme .

Théorème 8.10 — Moore-Aronszajn. Soit $K : E \times E \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction de type positif et soit

$$\mathcal{H}_0 = \text{vect}\{K(x, \cdot), x \in E\}$$

muni du produit scalaire induit par

$$\langle K(x, \cdot), K(y, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}_0} = K(x, y).$$

Le complété de \mathcal{H}_0 pour ce produit scalaire, noté \mathcal{H} , est l'unique espace de Hilbert qui soit un RKHS de noyau auto-reproduisant K .

La difficulté est maintenant d'identifier ce qu'est cet espace \mathcal{H} en des termes plus aménables au calcul.

■ **Exemple 8.5** Considérons le noyau

$$K(t, s) = \min(t, s).$$

L'espace \mathcal{H}_0 est donc l'ensemble des fonctions de la forme

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \min(t_k, \cdot)$$

muni du produit scalaire

$$\left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k \min(t_k, \cdot), \sum_{j=1}^m \beta_j \min(s_j, \cdot) \right\rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_k \beta_j \min(t_k, s_j).$$

Sous cette forme, il est difficile de dire ce qu'est \mathcal{H} , le complété de \mathcal{H}_0 . Compte-tenu de l'exemple 8.3, on sait que $W^{1,2}$ est un espace de Hilbert dont K est un noyau auto-reproduisant et d'après le théorème, cet espace de Hilbert est unique donc $\mathcal{H} = W^{1,2}$.

Une autre façon de le voir est la suivante. Compte-tenu de la définition du produit scalaire que l'on a mis sur $W^{1,2}$, l'application

$$I^1 : L^2 \longrightarrow W^{1,2}$$

$$u \longmapsto (t \mapsto \int_0^t u(s) \, ds)$$

est continue

$$\|I^1 u\|_{W^{1,2}} = \|u\|_{L^2}$$

et bijective, puisque l'on a admis que \dot{f} est unique dans la représentation de $f \in W^{1,2}$. Comme l'ensemble des fonctions en escalier

$$\mathcal{E} = \left\{ f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{[a_i, b_i]}, a_i < b_i < a_{i+1} \right\}$$

est dense dans L^2 , pour toute fonction $u \in L^2$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $u_\epsilon \in \mathcal{E}$ telle que

$$\|u - u_\epsilon\|_{L^2} < \epsilon.$$

Comme I^1 est une isométrie, on obtient

$$\|I^1(u) - I^1(u_\epsilon)\|_{W^{1,2}} < \epsilon.$$

On remarque ensuite que toute fonction en escalier peut s'écrire aussi sous la forme

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{1}_{[0, t_i]}$$

et que

$$I^1 \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{1}_{[0, t_i]} \right) = \sum_{i=1}^n \beta_i \min(t_i, \cdot).$$

On a donc bien montré que tout élément de $W^{1,2}$ est limite (dans $W^{1,2}$) de fonctions de \mathcal{H}_0 . ■

■ **Exemple 8.6** Dans les applications au machine learning, le noyau dit gaussien est d'un usage fréquent. Pour $\sigma > 0$, ce noyau est défini sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ par

$$K_\sigma(x, y) = \exp \left(-\sigma^2 \|x - y\|_{\mathbf{R}^n}^2 \right).$$

D'après STEINWART, HUSH et SCOVEL, “An Explicit Description of the Reproducing Kernel Hilbert Spaces of Gaussian RBF Kernels”, la fonction

$$\begin{aligned} \phi_\sigma : \mathbf{R}^n &\longrightarrow L^2(\mathbf{R}^n) \\ x &\longmapsto \left(z \mapsto \frac{(2\sigma)^{d/2}}{\pi^{d/4}} \exp \left(-2\sigma^2 \|x - z\|_{\mathbf{R}^n}^2 \right) \right) \end{aligned}$$

est telle que

$$K_\sigma(x, y) = \int_{\mathbf{R}^n} \phi_\sigma(x, z) \phi_\sigma(y, z) \, dz.$$

La description du RKHS associé est beaucoup plus compliquée car elle fait intervenir des fonctions holomorphes et des intégrales dans \mathbf{C} de la variable complexe. ■

8.2 Classification binaire

Considérons le nuage de points de la figure 8.1 et essayons de séparer les deux paquets par une droite.

Il y a ici une infinité de possibilités, dont quelques unes sont illustrées dans la figure 8.2.

Pour choisir la *meilleure* solution, on regarde la marge (voir la figure 8.3) entre chaque droite et les deux nuages de points, c'est-à-dire la distance d'une droite au point le plus proche de chacun des deux nuages.

Au final, on veut trouver la droite qui maximise cette marge. Avec un algorithme de type Support Vector Method que nous allons décrire maintenant, on arrive au résultat de la figure 8.4.

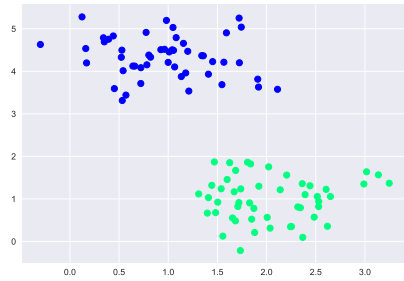


FIGURE 8.1: Deux paquets de points à séparer

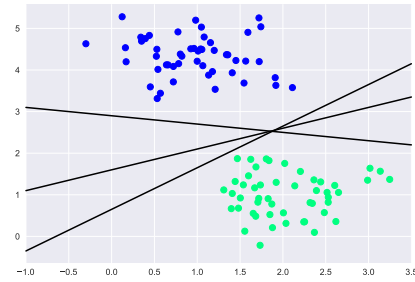


FIGURE 8.2: Quelques solutions possibles

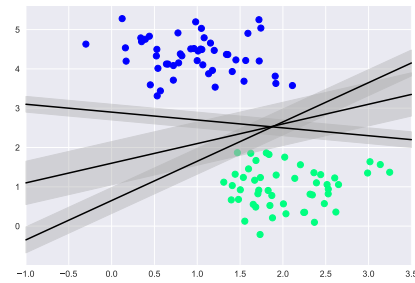


FIGURE 8.3: Avec les marges

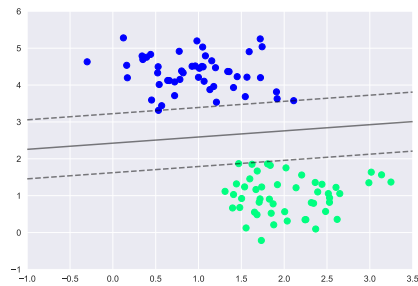


FIGURE 8.4: La solution optimale

On remarque qu'à l'optimum, et l'on s'en convaincra facilement, les marges touchent forcément au moins l'un des points de chaque nuage.

Ces points sont les *points supports* d'où le nom de la méthode.

Dans les problèmes de classification binaire, on doit à partir de quantités chiffrées trouver à quelle classe appartient l'individu/l'objet qui satisfait ces critères. Par exemple, comment prédire le sexe d'un individu sachant sa taille, son poids et éventuellement d'autres mensurations ? Pour ce faire, on dispose d'un échantillon

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

avec $x_i \in \mathbf{R}^p$ représente les variables d'entrée, et $y_i \in \{-1, 1\}$ représente la classe. Le plus simple des classifieurs est le classifieur binaire : on choisit $w \in \mathbf{R}^p$ et $b \in \mathbf{R}$ et on applique la règle

$$y = \text{signe}(\langle w, x \rangle_{\mathbf{R}^p} + b).$$

On remarque

$$H_{w,b} = \{x, \langle w, x \rangle_{\mathbf{R}^p} + b = 0\}$$

est un hyperplan affine de \mathbf{R}^p :

$$\begin{aligned} x \in H_{w,b} &\iff \langle w, x \rangle + b = 0 \\ &\iff \langle w, x + b \frac{w}{\|w\|^2} \rangle = 0 \\ &\iff \tau(x) := x + \frac{b}{\|w\|^2} w \in H_{w,0}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que les éléments de H_b sont ceux de H_0 qui est une hyperplan vectoriel (i.e. le noyau d'une forme linéaire) translatés d'un vecteur fixe.

Evidemment toute la difficulté est dans le choix de w et de b . Pour fixer les idées, imaginons des points bleus et rouges dans le plan, répartis de part et d'autre d'une droite (i.e. un hyperplan affine de \mathbf{R}^2).

Lemme 8.11 Pour $x \in E$,

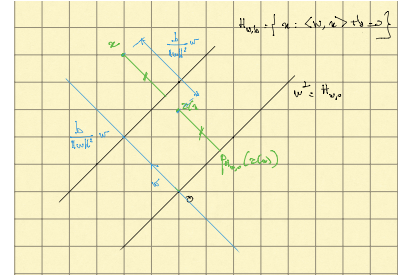
$$d(x, H_{w,b}) = \frac{|\langle w, x \rangle + b|}{\|w\|}.$$

Démonstration. La distance d'un point $x \in \mathbf{R}^n$ à l'hyperplan affine $H_{w,b}$ est la même que la distance de $\tau(x)$ à $H_{w,0} = \text{vect}(\{w\})^\perp$. Comme $H_{w,0}^\perp = \text{vect}(\{w\})$, la caractérisation de la projection orthogonale sur $H_{w,0}$ implique que

$$\tau(x) - P_{H_{w,0}}(\tau(x)) = \lambda w \implies d(x, H_{w,0}) = |\lambda| \|w\|.$$

Comme $P_{H_{w,0}}(\tau(x))$ appartient à $H_{w,0}$,

$$\begin{aligned} \langle w, P_{H_{w,0}}(\tau(x)) \rangle &= 0 \iff \langle w, x - \lambda w \rangle = 0 \\ &\iff \lambda = \frac{\langle w, x \rangle}{\|w\|^2}. \end{aligned}$$



Donc la distance de x à $H_{w,0}$ est donnée par

$$d(x, H_{w,0}) = \frac{|\langle w, x \rangle|}{\|w\|}.$$

En appliquant ce résultat à $\tau(x)$, on trouve le résultat. ■

L'hyperplan séparateur de marge maximale est donc solution du problème d'optimisation

$$\text{Trouver } w \text{ et } b \text{ qui maximisent } \min_k \frac{|\langle w, x_k \rangle + b|}{\|w\|}$$

Soit x^+ (respectivement x^-) un point au dessus (respectivement au dessous) du $H_{w,b}$ optimal, on a nécessairement

$$\frac{\langle w, x^+ \rangle + b}{\|w\|} = d(x^+, H_{w,b}) = d(x^-, H_{w,b}) = -\frac{\langle w, x^- \rangle + b}{\|w\|}$$

Il est évident que $H_{\alpha w, \alpha b} = H_{w,b}$, ce qui veut que w et b sont définis à un facteur multiplicatif près. On choisit ce facteur de sorte que

$$d(x^+, H_{w,b}) = d(x^-, H_{w,b}) = \frac{1}{\|w\|}.$$

Mais maximiser $\|w\|^{-1}$ revient à minimiser $\|w\|^2$. Par conséquent, la formulation du problème est maintenant

$$\text{Minimiser } \frac{1}{2} \|w\|^2 \text{ sous les contraintes } y_k(\langle w, x_k \rangle + b) \geq 1. \quad (8.4)$$

Le facteur $1/2$ n'est là que pour l'esthétique du résultat final. On utilise alors une méthode classique d'optimisation dite des multiplicateur de Lagrange. Sans prétendre à être exhaustif, voyons les grandes lignes de cette méthode. On introduit le lagrangien :

$$L(w, b, \lambda) = \frac{1}{2} \|w\|^2 + \sum_{k=1}^n \lambda_k (1 - y_k(\langle w, x_k \rangle + b)). \quad (8.5)$$

Le problème (8.4) est équivalent trouver le minimum de L sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$. Comme tout problème de point critique qui se respecte, on commence par annuler les dérivées partielles :

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = w_i - \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k x_k(i)$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial b} = - \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k.$$

Au point optimum (w^*, b^*, λ^*) , on doit avoir

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k x_k = w^* \text{ et } \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k = 0.$$

On reporte ces identités dans (8.5), il vient

$$\begin{aligned}
 L(w^*, b^*, \lambda) &= \frac{1}{2} \|w^*\|^2 + \sum_{k=1}^n \lambda_k - \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k x_k, w^* \right\rangle + b \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \lambda_k - \frac{1}{2} \|w^*\|^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n \lambda_k - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_k \lambda_j y_k y_j \langle x_j, x_k \rangle.
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

Les conditions de Kuhn-Tucker imposent aussi

$$\forall k, \lambda_k \geq 0. \tag{8.7}$$

On minimise donc le terme de droite de (8.6) en λ , sous les contraintes de (8.7) pour obtenir les multiplicateurs de Lagrange optimaux, λ_k^* . Ensuite on a

$$w^* = \sum_{k=1}^n \lambda_k^* y_k x_k.$$

Une fois que w^* est calculé, on trouve b^* en résolvant

$$L(w^*, b, \lambda^*) = \frac{1}{2} \|w^*\|^2 + \sum_{k=1}^n \lambda_k^* (1 - y_k (\langle w^*, x_k \rangle - b)).$$

Pour les cas simples comme celui donné en exemple, la méthode marche parfaitement. Malheureusement, il est fréquent (presque systématique) que les ensembles ne soient pas séparables. L'exemple le plus évident est de se demander comment séparer les points qui sont dans le disque de rayon 1 dans \mathbf{R}^2 et ceux qui sont en dehors. Là, la réponse est simple. On passe en coordonnées polaires. Les points à l'intérieur du disque ont un rayon inférieur à 1, les autres un rayon supérieur à 1 donc la droite $\{(r, \theta), r = 1\}$ est un hyperplan séparateur.

L'idée qui se dégage de cet exemple est que même si notre nuage de points n'est pas séparable dans l'espace de départ, on peut espérer qu'une transformation bien choisie des données les transforment en un nuage de points séparable dans l'espace cible. On veut donc trouver un espace de Hilbert \mathcal{G} et une fonction Φ de \mathbf{R}^n dans \mathcal{G} tel que le nuage devienne séparable par un hyperplan. On peut appliquer le même raisonnement que celui que l'on vient de faire aux points $(\Phi(x_k), k = 1, \dots, n)$, le problème d'optimisation à résoudre devient

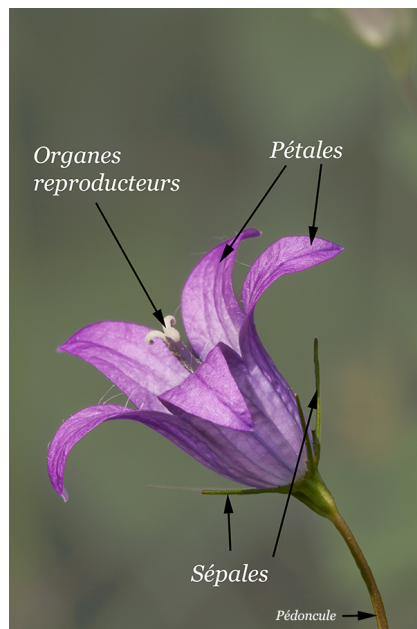
$$\text{Minimiser } \sum_{k=1}^n \lambda_k - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_k \lambda_j y_k y_j \langle \Phi(x_j), \Phi(x_k) \rangle_{\mathcal{G}}$$

sous la contrainte (8.7). Mais en vertu du lemme 8.8, on sait que l'application

$$(x, y) \mapsto \langle \Phi(x_j), \Phi(x_k) \rangle_{\mathcal{G}}$$

munit \mathcal{G} d'un noyau auto-reproduisant. On n'a pas besoin d'identifier Φ mais juste besoin de connaître le noyau K pour faire les calculs. L'un des noyaux les plus utilisés est le noyau gaussien. On transforme ainsi un problème en dimension finie en un problème en dimension finie avec une fonction que l'on ne maîtrise pas vraiment ... et pourtant ça marche. Cette astuce est connue sous le doux nom de *kernel trick* ou *truc du noyau*.

Les iris (plantes) comportent au moins deux espèces : le versicolore et virginica. On essaye de les distinguer par les longueurs et largeurs de leurs sépales.



Les données sont représentées comme dans la figure 8.5.

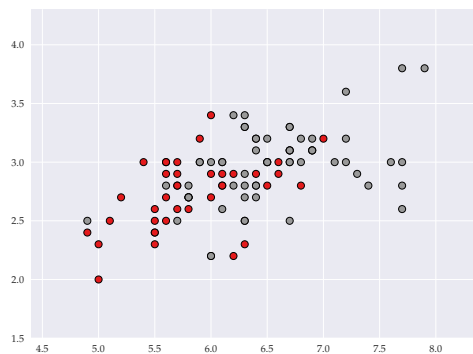


FIGURE 8.5: Les différents type d'iris en fonction des dimensions de leurs sépales. En abscisse, la longueur de chaque sépale, en ordonnée, la largeur du sépale correspondant

Après application de l'algorithme avec le noyau gaussien, on voit dans la figure 8.6 les points supports (ceux qui sont à la frontière des hyperplans dans l'espace cible).

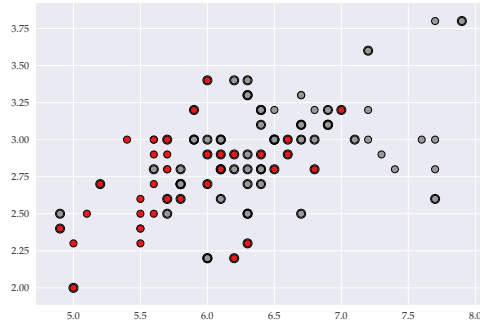


FIGURE 8.6: Les points entourés sont les points supports

La figure 8.7 représente les zones qui correspondent à chaque étiquette.

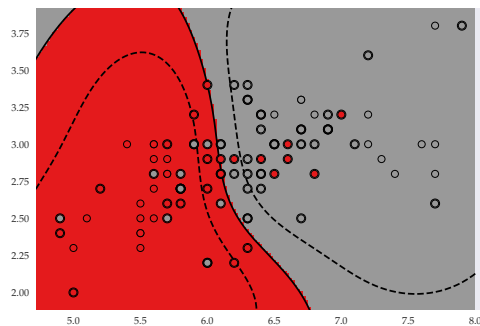


FIGURE 8.7: Les zones de partage

9

Fonctions à variation bornée

Ce chapitre est en chantier. Il peut y avoir des coquilles, des imprécisions, des incomplétudes, etc.

Définition 9.1 Une partition (ou subdivision) P de l'intervalle $[s, t]$ est définie par un entier $K \geq 2$ et une famille de n points de cet intervalle sans répétition :

$$P = \{(t_0, \dots, t_K), s = t_0 < t_1 < \dots < t_K = t\}. \quad (9.1)$$

Remarquez que l'on n'impose pas que K soit le même pour toutes les subdivisions. Le pas de P , noté $|P|$, est défini par

$$|P| = \sup_{i=0}^{K-1} |t_{i+1} - t_i|.$$

L'ensemble des partitions de $[s, t]$ est noté $\mathcal{P}([s, t])$.

Définition 9.2 Pour une fonction $f : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$, on définit

$$|f|_{\text{var}([s, t])} = \sup_{P \in \mathcal{P}([s, t])} \sum_{i=0}^n |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \in \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

On dit qu'une fonction f est à variation bornée sur $[s, t]$ lorsque $|f|_{\text{var}([s, t])}$ est fini. Cette quantité s'appelle alors la variation de f . On note $\mathcal{C}^{\text{var}}([s, t])$ l'ensemble des fonctions à variation bornée sur $[s, t]$.

Théorème 9.3 Une fonction continue f est à variation bornée sur $[s, t]$ si et seulement si elle est à variation bornée sur $[s, r]$ et sur $[r, t]$ pour tout $r \in [s, t]$. De plus on a

$$|f|_{\text{var}([s, t])} = |f|_{\text{var}([s, r])} + |f|_{\text{var}([r, t])}. \quad (9.2)$$

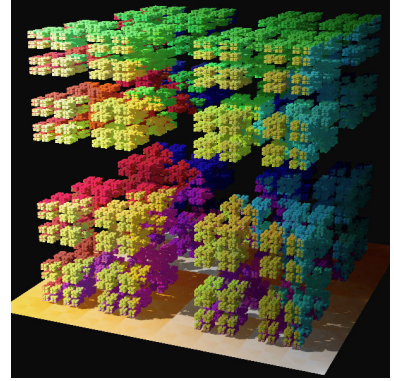


FIGURE 9.1: Le cube de Cantor

Les fonctions croissantes et les fonctions lipschitziennes sont à variation finie.

Théorème 9.4 — Décomposition de Jordan. Soit f à variation finie sur $[a, b]$, il existe un unique couple de fonctions (g, h) telles que :

- $f = g - h + f(a)$;
- g et h croissantes;
- $g(a) = h(a) = 0$;
- $\text{Var}_{[a,b]}(f) = \text{Var}_{[a,b]}(g) + \text{Var}_{[a,b]}(h)$.

Démonstration. On pose :

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(f(x) - f(a) + \text{Var}_{[a,x]}(f) \right)$$

$$\text{et } h(x) = \frac{1}{2} \left(f(a) - f(x) + \text{Var}_{[a,x]}(f) \right).$$

Il est immédiat que :

$$g(a) = h(a) = 0, \quad f = g - h + f(a).$$

Comme :

$$|f(x) - f(y)| \leq \text{Var}_{[x,y]}(f) = \text{Var}_{[a,y]}(f) - \text{Var}_{[a,x]}(f),$$

g et h sont croissantes. Par conséquent :

$$\text{Var}_{[a,b]}(g) = g(b) - g(a) \text{ et } \text{Var}_{[a,b]}(h) = h(b) - h(a),$$

d'où : $\text{Var}_{[a,b]}(f) = \text{Var}_{[a,b]}(g) + \text{Var}_{[a,b]}(h)$.

Il reste à montrer l'unicité. On suppose qu'il existe une autre paire (g_1, h_1) que celle construite. Soit $x < y$, g_1 est croissante donc $g_1(y) - g_1(x) \geq 0$. D'autre part :

$$g_1(y) - g_1(x) = f(y) - f(x) + h_1(y) - h_1(x) \geq f(y) - f(x),$$

puisque h_1 est croissante. On peut donc dire que :

$$g_1(y) - g_1(x) \geq \max(0, f(y) - f(x))$$

$$= \frac{1}{2}(f(y) - f(x) + |f(y) - f(x)|).$$

Pour toute subdivision de $[x, y]$, on a alors :

$$g_1(y) - g_1(x) \geq \frac{1}{2}(f(y) - f(x) + \sum_i |f(t_{i+1}) - f(t_i)|)$$

$$= \frac{1}{2}(f(y) - f(x) + \text{Var}_{[x,y]}(f))$$

$$= \frac{1}{2}(f(y) - f(x) + \text{Var}_{[a,y]}(f) - \text{Var}_{[a,x]}(f))$$

$$= g(y) - g(x).$$

La fonction $\beta \equiv g_1 - g$ est donc croissante. Par ailleurs, la relation :

$$f \equiv g - h + f(a) \equiv g_1 - h_1 + f(a)$$

implique que $h_1 \equiv h + \beta$ et $\beta(a) = 0$. Enfin, la contrainte :

$$\text{Var}_{[a,b]}(f) = \text{Var}_{[a,b]}(g_1) + \text{Var}_{[a,b]}(h_1),$$

implique que :

$$g_1(b) - g_1(a) + h_1(b) - h_1(a) = g(b) + h(b).$$

Or $g_1(b) - g_1(a) + h_1(b) - h_1(a) = g(b) + h(b) + 2\beta(b)$. β est donc la fonction nulle, ce qui signifie que $g \equiv g_1$ et $h \equiv h_1$. ■

De cette décomposition, on peut tirer un lien entre fonctions à variation finie et mesures.

Théorème 9.5 Soit f une fonction à variation finie, continue à droite. Il existe deux mesures positives λ_f^+ et λ_f^- telles que

$$f(b) - f(a) = \lambda_f^+([a, b]) - \lambda_f^-([a, b]) \quad (9.3)$$

et

$$\text{var}_{[a,b]}(f) = \lambda_f^+([a, b]) + \lambda_f^-([a, b]). \quad (9.4)$$

La décomposition est unique si l'on exige de plus que les deux mesures soient à support disjoint, ce qui est toujours faisable.

Corollaire 9.6 L'espace des fonctions à variation bornée sur $[0, T]$ munie de la norme

$$\|f\|_1 = |f(0)| + \|f\|_{\text{var}([0, T])} \quad (9.5)$$

est un espace de Banach.

Démonstration. D'après la définition de la norme (9.5) et l'égalité (9.4), l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{\text{var}}([0, T]) &\longrightarrow \mathbf{R} \times \mathfrak{M}_f([0, T]) \\ f &\longmapsto (f(0), \lambda_f^+ - \lambda_f^-) \end{aligned}$$

est une isométrie. Le résultat en découle. ■

Dans ces conditions, on écrira

$$\int g(s) \, df(s) = \int g(s) \, d\lambda_f^+(s) - \int g(s) \, d\lambda_f^-(s) \quad (9.6)$$

pour peu que

$$\int |g(s)| \, d|f|(s) = \int |g(s)| \, d(\lambda_f^+ + \lambda_f^-)(s) < \infty. \quad (9.7)$$

On notera que, en écrivant les intégrales suivantes avec les mesures λ_f^\pm , l'on a

$$\left| \int g(s) \, df(s) \right| \leq \int |g(s)| \, d|f|(s).$$

Théorème 9.7 Une fonction à variation finie, continue à droite, a un nombre au plus dénombrable de discontinuité.

Démonstration. On peut se restreindre à f croissante sur un intervalle $[a, b]$. Comme f est continue à droite et croissante, elle prend ses valeurs dans $[f(a), f(b)]$. Soit $A_n = \{s, \Delta f(s) \geq 1/n\}$ et $|A_n|$ son cardinal. Comme

$$f(a) + |A_n| \frac{1}{n} \leq f(b),$$

on voit que A_n est fini. L'ensemble des points de discontinuité de f est la réunion dénombrable des A_n donc c'est un ensemble au plus dénombrable. ■

Théorème 9.8 — Intégration par parties. Soit f et g deux fonctions à variation finie et continues à droite sur $[0, t[$, alors :

$$f(t)g(t) - f(0)g(0) = \int_0^t f(s^-) \, dg(s) + \int_0^t g(s^-) \, df(s) + [f, g]_t, \quad (9.8)$$

où :

$$[f, g]_t = \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta f(s) \Delta g(s) \text{ et } \Delta f(s) = f(s) - f(s^-).$$

Démonstration. On calcule l'intégrale de $\lambda_f \otimes \lambda_g([0, t] \times [0, t])$ de deux manières différentes. D'une part, par définition d'une mesure produit, on a

$$\lambda_f \otimes \lambda_g([0, t] \times [0, t]) = \lambda_f([0, t]) \lambda_g([0, t]) = (f(t) - f(0))(g(t) - g(0)).$$

D'autre part, on décompose le carré en deux triangles (inférieur et supérieur : I et S , respectivement) et la diagonale D , voir figure 9.2.

On applique aux deux triangles le théorème de Fubini. Pour le cas du triangle $I \cup D$, on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_f \otimes \lambda_g(I \cup D) &= \int_0^t \left(\int_0^s d\lambda_g \right) d\lambda_f(s) \\ &= \int_0^t (g(s) - g(0)) d\lambda_f(s) \\ &= \int_0^t g(s) d\lambda_f(s) - g(0)(f(t) - f(0)) \end{aligned} \quad (9.9)$$

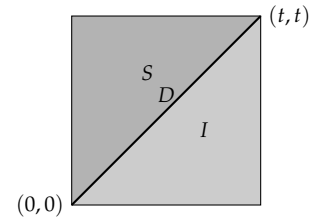


FIGURE 9.2: Décomposition de $[0, t]^2$

Comme g est à variation finie, g n'a qu'un nombre au plus dénombrable de discontinuités. Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_0^t g(s) d\lambda_f(s) &= \int_0^t g(s^-) d\lambda_f(s) + \int_0^t (g(s) - g(s^-)) d\lambda_f(s) \\ &= \int_0^t g(s^-) d\lambda_f(s) + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta g(s) \Delta f(s) \end{aligned} \quad (9.10)$$

Pour le triangle supérieur, on

$$\lambda_f \otimes \lambda_g(S) = \int_0^t f(s^-) d\lambda_g(s) - f(0)(g(t) - g(0)). \quad (9.11)$$

En sommant (9.9), (9.10) et (9.11), on obtient le résultat voulu. ■

Le dernier théorème est un théorème de changement de variable. En dimension 1, le théorème de changement variable usuel stipule que :

$$F(g(t)) - F(g(0)) = \int_0^t d(F \circ g)(s) = \int_0^t F'(g(s))g'(s) ds. \quad (9.12)$$

C'est en fait l'application de la relation $f(t) - f(0) = \int_0^t f'(s) ds$ à l'identité $(F \circ g)' = F' \circ g \cdot g'$. Dans le cas des fonctions à variation finie, on n'a pas la première relation et la deuxième paraît difficile à vérifier. Néanmoins, on obtient un résultat similaire à (9.12).

Théorème 9.9 — Formule de changement de variables ou formule d'Itô.

Soit g une fonction à variation finie, continue à droite et F une fonction de classe \mathcal{C}^1 , on a :

$$\begin{aligned} F(g(t)) - F(g(0)) &= \int_0^t F'(g(s^-)) dg(s) \\ &\quad + \sum_{0 \leq s \leq t} F(g(s)) - F(g(s^-)) - F'(g(s^-)) \Delta g(s). \end{aligned} \quad (9.13)$$

En particulier, si g est continue on obtient le résultat usuel.

Démonstration. On démontre (9.13) pour $F(x) = x^n$, par récurrence sur n à partir de la formule d'intégration par parties. L'expression étant linéaire en F , (9.13) est donc vraie pour les polynômes. On approche toute fonction \mathcal{C}^1 par une suite de polynômes au sens de la norme uniforme sur $[0, t]$, les passages à la limite sont possibles, on en déduit le résultat pour F de classe \mathcal{C}^1 . ■

On a déjà vu la notion de mesures absolument continues, il nous reste celles de mesures singulières.

Définition 9.10 Deux mesures μ et ν sur (E, \mathcal{E}) sont singulières l'une par rapport à l'autre s'il existe une partition d'ensembles

mesurables A et B de E tels que $\mu(B) = 0$ et $\nu(A) = 0$.

Théorème 9.11 — Théorème de décomposition de Lebesgue. Soit μ et ν deux mesures σ -finies sur (E, \mathcal{E}) , il existe une unique décomposition de ν comme somme d'une mesure, notée ν_{abs} , absolument continue par rapport à μ et d'une mesure ν_{sing} qui est singulière par rapport à μ .

Si μ est la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R} , il existe plusieurs types de mesures qui lui sont singulières. Évidemment, les mesures atomiques, i.e. somme d'un nombre au plus dénombrable de mesures de Dirac pondérées, mais il y en a d'autres comme les mesures fractales.

■ **Exemple 9.1** L'objectif est de construire un ensemble non dénombrable de mesure de Lebesgue nulle. Soit S les éléments de $\{0, 1, 2\}^{\mathbf{N}}$ qui ne se terminent pas par une infinité de 2.

- 1) Montrer que tout nombre x de $[0, 1[$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n 3^{-n} \text{ où } (x_n, n \geq 1) \in S.$$

On appelle la suite $(x_n, n \geq 1)$ le développement triadique de x .

- 2) On appelle C , l'ensemble de Cantor, constitué des réels de $[0, 1[$ qui n'ont pas de 1 dans leur développement triadique. Montrer que $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ où les E_n sont des ensembles que l'on construira (voir la figure 9.3).
- 3) Montrer que la mesure de Lebesgue de C est nulle.
- 4) Montrer que C est non dénombrable.
- 5) Montrer que C^c est partout dans $[0, 1[$: quel que soit $\epsilon > 0$, pour tout $x \in [0, 1[$, il existe $y \in C^c$ tel que $|x - y| < \epsilon$.
- 6) En déduire que l'intérieur de C est vide.

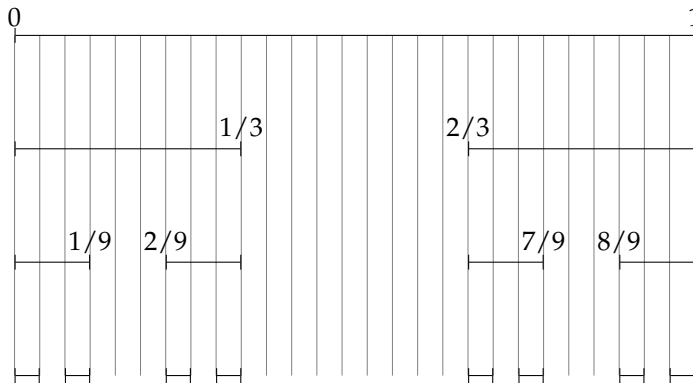


FIGURE 9.3: Les premières étapes de la construction de l'ensemble de Cantor.

À partir de l'ensemble de Cantor, on va maintenant construire une fonction continue, croissante, nulle en 0, qui vaut 1 en 1 et dont la

dérivée est presque-partout nulle...

- La fonction f_0 est définie par $f_0(x) = x$.
- La fonction f_1 est continue, affine par morceaux, est telle que $f_1(0) = 0$, $f_1(1) = 1$ et vaut $1/2$ sur E_1^c donc

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{pour } x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{pour } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(x - \frac{2}{3}) & \text{pour } x \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

- Au rang n , f_n est continue, affine par morceaux, égale à $j2^{-n}$ sur le j -ième intervalle de E_n^c et telle que $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$.
- 1) Montrer que $\|f_n - f_{n+1}\|_\infty \leq 2^{-(n+1)}$.
- 2) En déduire que la suite $(f_n, n \geq 1)$ est de Cauchy dans l'ensemble des fonctions continues muni de la norme uniforme. Soit f sa limite.
- 3) Montrer que f est croissante, vaut 0 en 0 et 1 en 1, est dérivable et de dérivée nulle sur C^c .

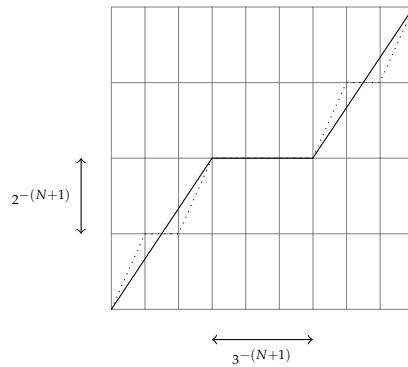


FIGURE 9.4: Vue partielle de deux étapes successives dans la construction de la fonction de Cantor.

On a donc construit une fonction croissante donc à variation bornée, qui vaut 0 en 0 et 1 en 1 mais qui est de dérivée nulle presque partout.

■

■ **Remarque 17** On peut montrer que pour f et g à variation bornée, on a

$$\int_0^t f(s) \, dg(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{it}{n}\right) \left(g\left(\frac{(i+1)t}{n}\right) - g\left(\frac{it}{n}\right) \right).$$

■

9.1 Variables aléatoires réelles

Une variable aléatoire réelle X est une application mesurable d'un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ dans $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$. Sa loi, notée \mathbf{P}_X , est la mesure image

de \mathbf{P} par X . Elle est donc caractérisée par la fonction

$$\begin{aligned} F_X : \mathbf{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x). \end{aligned}$$

C'est une fonction croissante, bornée et continue à droite donc à variation bornée. Elle peut donc s'écrire comme

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) \, du + \sum_{y, \Delta F_X(y) \neq 0} \Delta F_X(y) \mathbf{1}_{[y, +\infty)}(x) + \mu_{\text{frac}}([-\infty, x]). \quad (9.14)$$

Si les deux derniers termes de la somme de droite sont nuls, on dit que la loi de X est à densité, sous entendu par rapport à la mesure de Lebesgue. Le théorème de dérivation de Lebesgue dit que, même si f_X n'est pas continue,

$$\mathbf{P}(X \in [x, x+h]) = \int_x^{x+h} f_X(u) \, du \xrightarrow{h \rightarrow 0} f_X(x)h.$$

Plus la densité est élevée en un point, plus X a de chance d'avoir cette valeur. Si la densité est la même partout, on obtient la loi uniforme, celle dont la densité est constante :

$$f_X(u) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(u).$$

La loi qui nous intéresse pour la suite est la loi dite normale ou gaussienne, caractérisée par deux paramètres m et σ^2 dont la densité est donnée par

$$f_X(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right).$$

On a en particulier

$$\mathbf{E}[X] = m \text{ et } \text{var}(X) = \sigma^2.$$

Théorème 9.12 Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\sigma X + m \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. La somme de deux variables indépendantes de loi gaussienne est une loi gaussienne de paramètres, la somme des paramètres :

$$\mathcal{N}(m, \sigma^2) \stackrel{\perp}{*} \mathcal{N}(r, \tau^2) \sim \mathcal{N}(m+r, \sigma^2 + \tau^2).$$

Pour simuler une variable aléatoire de loi gaussienne, on peut utiliser la méthode dite de Rayleigh

$$\sqrt{-2 \ln \mathcal{U}([0,1])} \stackrel{\perp}{*} \cos(2\pi \mathcal{U}([0,1])) \sim \mathcal{N}(0,1).$$

On peut grâce au code Python suivant

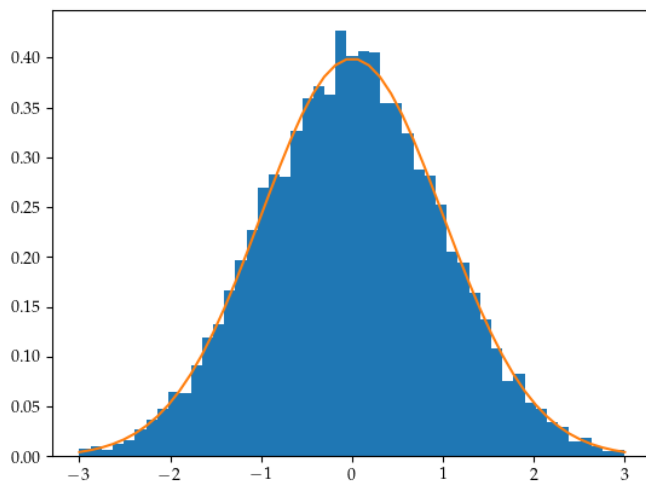

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import scipy as sp
4
5 t=np.linspace(-3,3,50)
6 plt.hist(np.random.randn(20000),bins=t,density=True)
7 plt.plot(t,sp.stats.norm.pdf(t))

```

Listing 9.1 – Simulation de gaussiennes

on obtient cet histogramme, qui confirme bien l'intuition que la densité en un point est proportionnelle à la fréquence des fois où un tirage tombe proche de cette valeur.

FIGURE 9.5: Histogramme de 20 000 tirages de gaussiennes $\mathcal{N}(0,1)$. En orange, la courbe $x \mapsto \exp(-x^2/2)(2\pi)^{-1/2}$

Théorème 9.13 Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires gaussiennes. Soit

$$m_n = \mathbb{E}[X_n] \text{ et } \sigma_n^2 = \text{var}(X_n).$$

La suite $(X_n, n \geq 1)$ converge si et seulement si

$$m_n \rightarrow m \text{ et } \sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2.$$

Dans ce cas, la limite est une gaussienne de paramètre m et σ .

9.2 Espace de Sobolev

On considère d'abord l'espace de Hilbert $L^2([0, 1], dt)$ muni de son produit scalaire usuel

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt.$$

■ **Remarque 18 — Construction d'une base orthonormale de L^2 .** On peut vouloir construire une base de $L^2([0, 1])$ avec une suite constituée exclusivement de fonctions cosinus (respectivement de fonctions sinus). L'astuce pour ce faire consiste à plonger $L^2([0, 1])$ dans $L^2([-1, 1])$. On a alors deux choix : le prolongement par parité ou celui par imparité. Considérons le premier :

$$P : L^2([0, 1]) \longrightarrow L^2([-1, 1])$$

$$f \longmapsto Pf(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

On sait que Pf peut s'écrire dans $L^2([-1, 1])$ sous la forme

$$Pf(x) = L^2 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n x) + L^2 - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(\pi n x). \quad (9.15)$$

Comme

$$b_n = \int_{-1}^1 Pf(x) \sin(\pi n x) dx$$

par imparité, on en déduit que les b_n sont tous nuls. Par conséquent, en prenant la restriction du développement (9.15), on a que

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{n=0}^N a_n \cos(\pi n x) \right|^2 dx \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

c'est-à-dire que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\pi n x).$$

La famille $(\cos(\pi n \cdot), n \geq 0)$ est donc dense dans $L^2([0, 1])$. C'est une famille orthogonale mais pas orthonormale étant donné que

$$\int_0^1 \cos(\pi n x)^2 dx = \frac{1}{2}.$$

Une base de $L^2([0, 1])$ est donc

$$e_0(t) = 1 \text{ et } e_n(t) = \sqrt{2} \cos(\pi n t), \text{ pour } n \geq 1. \quad (9.16)$$

■

À partir de cet espace, on construit l'espace de Sobolev H^1 (ou $W^{1,2}$), appelé aussi espace de Cameron-Martin comme l'espace des fonctions absolument continues dont la dérivée est de carré intégrable :

$$H^1 = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \exists \dot{f} \in L^2 \text{ telle que } f(t) = \int_0^t \dot{f}(u) \, du \right\}.$$

On peut montrer que la fonction \dot{f} donc f est la primitive est nécessairement unique. Par conséquent, l'application

$$\begin{aligned} I^1 : L^2 &\longrightarrow H^1 \\ u &\longmapsto I^1 u \end{aligned}$$

est bijective. De plus, si l'on munit H^1 du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{H^1} = \int_0^1 \dot{f}(s) \dot{g}(s) \, ds,$$

on fait de I^1 une isométrie. Par conséquent, H^1 est un espace de Hilbert séparable et pour une BONC $(e_n, n \geq 0)$ de L^2 , la suite de fonction $(I^1 e_n, n \geq 0)$ est une BONC de H^1 . Si l'on prend la base donnée en (9.16), on obtient

$$h_0(t) = t \text{ et } h_n(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi n} \sin(\pi n t)$$

comme BONC de H^1 .

9.3 Mouvement brownien

Définition 9.14 Soit $(\gamma_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Considérons la série aléatoire :

$$B_N(\omega, t) = \sum_{n=0}^N \gamma_n(\omega) h_n(t).$$

On a plusieurs façons de voir B_N :

- La version probabiliste à ω fixé. On fixe ω , on regarde la fonction $t \mapsto B_N(t)$, qu'on appelle « trajectoire ».
- On a une famille de variables aléatoires indexées par t , on parle de processus stochastique.
- On regarde la variable aléatoire

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}) \\ \omega &\longmapsto (t \mapsto B_N(t), t \in [0, 1]), \end{aligned}$$

ce qui revient à dire que B_N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$.

— On peut aussi regarder la fonction

$$\begin{aligned}\Omega \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (\omega, t) &\longmapsto B_N(t).\end{aligned}$$

Toutes ces façons de voir sont équivalentes mais seules les deux dernières permettent de comprendre dans quel espace on va chercher la limite de B_N . Avec l'interprétation de B_N comme variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$, on peut se demander s'il existe une variable aléatoire B à valeurs dans le même espace telle que

$$\mathbf{P}(\|B_N - B\|_\infty \rightarrow 0) = 1,$$

ce qui revient à dire B_N tend vers B presque-sûrement ou

$$\mathbf{E} \left[\|B_N - B\|_\infty^p \right] \rightarrow 0,$$

ce qui revient à dire la variable réelle $\|B_N - B\|_\infty$ tend vers 0 dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On a le théorème suivant :

Théorème 9.15 — Théorème d'Itô-Nisio. Soit $(\gamma_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, la série aléatoire

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n h_n(t) \quad (9.17)$$

converge presque sûrement dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$:

$$\mathbf{P}\left(\omega, \left\| \sum_{n=0}^m \gamma_n(\omega) h_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(\omega) h_n(t) \right\|_\infty \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0\right) = 1. \quad (9.18)$$

On a aussi

$$\mathbf{E} \left[\int_0^1 \left| \sum_{n=0}^m \gamma_n(\omega) h_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(\omega) h_n(t) \right|^2 dt \right] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \quad (9.19)$$

Démonstration. Avec un minimum d'outils, on peut montrer l'équation (9.19) mais pas (9.18). Remarquons que

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \left[\int_0^1 \left| \sum_{n=0}^m \gamma_n(\omega) h_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(\omega) h_n(t) \right|^2 dt \right] \\ = \int_{\Omega} \int_0^1 \left| \sum_{n=0}^m \gamma_n(\omega) h_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(\omega) h_n(t) \right|^2 dt d\mathbf{P}(\omega),\end{aligned}$$

On est donc en train d'essayer de montrer une convergence dans l'espace $L^2(\Omega \times [0, 1], \mathbf{P} \otimes \ell)$, qui est un espace de Hilbert. Il faut et il suffit

de montrer que l'on a une suite de Cauchy dans cet espace. On calcule donc

$$\int_{\Omega} \int_0^1 |\mathcal{B}_N(\omega, t) - \mathcal{B}_M(\omega, t)|^2 dt d\mathbf{P}(\omega).$$

On a alors

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_0^1 |\mathcal{B}_N(\omega, t) - \mathcal{B}_M(\omega, t)|^2 dt d\mathbf{P}(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \int_0^1 \left| \sum_{k=N+1}^M \gamma_k(\omega) h_k(t) \right|^2 dt d\mathbf{P}(\omega) \\ &= \int_0^1 \mathbf{E} \left[\left(\sum_{k=N+1}^M \gamma_k h_k(t) \right)^2 \right] dt \\ &= \int_0^1 \mathbf{E} \left[\sum_{k=N+1}^M \sum_{l=N+1}^M \gamma_k \gamma_l h_k(t) h_l(t) \right] dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=N+1}^M \sum_{l=N+1}^M \mathbf{E} [\gamma_k \gamma_l] h_k(t) h_l(t) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=N+1}^M h_k(t)^2 dt \\ &\leq \int_0^1 \sum_{k=N+1}^M \frac{2}{\pi^2 k^2} dt \\ &= \sum_{k=N+1}^M \frac{2}{\pi^2 k^2}, \end{aligned}$$

qui est le reste de Cauchy de $\zeta(2)$. Par conséquent, la suite B_N converge dans $L^2(\Omega \times [0, 1], \mathbf{P} \otimes \ell)$ vers B définie en (9.17) ■

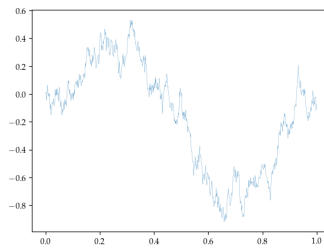
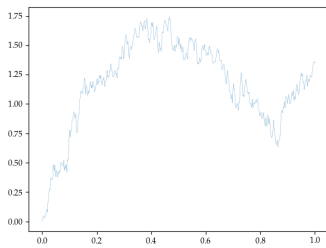


FIGURE 9.6: S_{500} et S_{5000} échantillonnée en 1000 points. On voit la non différentiabilité apparaître à vue d'œil.

Corollaire 9.16 Pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\mathbf{E} [B(t)] = 0 \text{ et } \mathbf{E} [B(t)^2] = t.$$

Par ailleurs,

$$\mathbf{E} [B(t)B(s)] = \min(t, s).$$

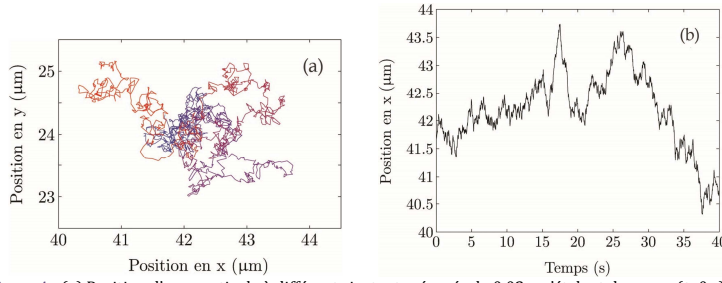


Figure 4 - (a) Position d'une particule à différents instants séparés de 0.02 s, s'étalant du rouge ($t=0$ s) au bleu ($t=40$ s). (b) Position en X en fonction du temps, t , du colloïde de l'image (a). 1 pixel représente 64.5 nm. Une trajectoire analogue se trouve dans le fichier joint à cet article (documents complémentaires).

FIGURE 9.7: Extrait du papier « Étude expérimentale du mouvement brownien d'une particule colloïdale » par P. Maurer, J. Ferrand, M. Leocmach, T. Gibaud

Corollaire 9.17 — Admis. Pour tout $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$, les variables aléatoires

$$\left(B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1}) \right)$$

sont indépendantes.

Corollaire 9.18 Soit un entier $n \geq 1$, on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(B\left(\frac{i+1}{n}\right) - B\left(\frac{i}{n}\right) \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

On s'intéresse maintenant à la régularité de B dont on va montrer qu'il est plus que continu.

Définition 9.19 Soit $\alpha \in [0, 1]$ et $p \geq 1$, on note $W^{s,p}$ l'espace de Sobolev-Slobodetskii des fonctions f de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} telles que

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{|f(t) - f(s)|^p}{|t - s|^{1+p\alpha}} ds dt < \infty.$$

L'intérêt de ces espaces réside dans ce que l'on appelle les « injections de Sobolev » : Si $\alpha - 1/p > 0$ alors

$$W^{\alpha,p} \subset \text{Hol}\left(\alpha - \frac{1}{p}\right). \quad (9.20)$$

Théorème 9.20 Les trajectoires de B sont presque sûrement dans $\text{Hol}(1/2 - \epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$.

Corollaire 9.21 Les trajectoires de B ne peuvent pas être à variation bornée.

Théorème 9.22 Pour f de classe \mathcal{C}^2 ,

$$f(B(t)) = f(0) + \int_0^t f'(B(s)) \, dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B(s)) \, ds \quad (9.21)$$

où

$$\int_0^t f'(B(s)) \, dB(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f'\left(B\left(\frac{i-1}{n}\right)\right) \left(B\left(\frac{i}{n}\right) - B\left(\frac{i-1}{n}\right)\right). \quad (9.22)$$

A

Guide de survie en théorie de la mesure

A.1 Tribu, mesures, etc.

Sauf à renoncer à l'axiome du choix, on ne peut pas construire de mesure sur toutes les parties de n'importe quel espace. Il faut donc définir l'ensemble des parties « mesurables ». Pour ce faire, on introduit la notion de tribu. Ensuite seulement, viendra la notion de mesure.

Définition A.1 Soit Ω un ensemble. Un sous-ensemble \mathcal{A} de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- 2) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$,
- 3) $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \in \mathbf{N} \implies \cup_i A_i \in \mathcal{A}$.

Les éléments d'une tribu sont appelés *événements* en probabilités ou (*ensembles*) *mesurables* en théorie de la mesure.

Les exemples suivantes sont d'une utilisation constante.

- La tribu *grossière* est la tribu constituée des seuls éléments \emptyset et Ω .
- La tribu la plus *fine* est la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.
- Si \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont deux tribus alors $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est encore une tribu.
- Pour $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu qui contient \mathcal{C} donc l'ensemble des tribus qui contiennent \mathcal{C} est non vide. Par conséquent, cet ensemble a un plus petit élément, au sens de l'intersection : c'est la plus petite tribu qui contient \mathcal{C} . On appelle cette tribu la tribu *engendrée par \mathcal{C}* , elle est notée $\sigma(\mathcal{C})$.
Pour un ensemble A de Ω , $\sigma(\{A\}) = \{A, A^c, \emptyset, \Omega\}$.
- Sur un ensemble topologique, la tribu borélienne est la tribu engendrée par les ouverts. La tribu borélienne sur \mathbf{R} est la plus petite tribu qui contient les intervalles ouverts de la forme $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b$. De même, sur \mathbf{R}^k , la tribu borélienne est la plus petite tribu qui contient les pavés $]a_1, b_1[\times \dots \times]a_k, b_k[$.

Définition A.2 Une application μ de \mathcal{A} dans \mathbf{R}^+ est une mesure lorsqu'elle satisfait les deux propriétés suivantes :

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- μ est une application pour σ -additive : pour toute famille $(A_j, j \in \mathbf{N}^*)$ d'éléments de \mathcal{A} deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j). \quad (\text{A.1})$$

Une mesure est dite de probabilité lorsque la masse totale, i.e., $\mu(\Omega)$, vaut 1. Dans ce cas, on parle de mesure de probabilités et on la note \mathbf{P} plutôt que μ .

■ **Exemple A.1** L'exemple le plus simple de mesure est donnée par la mesure de Dirac en un point $a \in \Omega$:

$$\delta_a(A) = 1 \text{ si } a \in A, \delta_a(A) = 0 \text{ sinon.}$$

■

A.2 Fonctions mesurables

Les fonctions mesurables sont à la théorie de la mesure ce que les fonctions continues sont à la topologie.

Définition A.3 Une fonction f de $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ dans $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ est mesurable lorsque

$$f^{-1}(C) \in \mathcal{A}_1 \text{ pour tout } C \in \mathcal{A}_2.$$

- Une fonction continue est mesurable.
- La somme, le produit de deux fonctions mesurables sont mesurables.
- La composition de deux fonctions mesurables est mesurable.
- Le supréum et l'infimum d'une famille de fonctions mesurables sont mesurables :

$$\sup_n f_n \text{ et } \inf_n f_n \text{ sont mesurables.}$$

- Par conséquent, les limites inférieures et supérieures d'une suite de fonctions sont mesurables.
- En particulier, si une suite de fonctions converge simplement, ses limites inférieures et supérieures coïncident donc une limite simple de fonctions mesurables est mesurable.

Ce dernier résultat est très intéressant parce que pour les fonctions continues, on est assuré de la continuité d'une limite de fonctions continues que si la convergence est uniforme.

Partant d'un espace mesuré $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ et d'une application mesurable f de $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ dans $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, il est naturel de se demander comment se transforme la mesure μ sous l'effet de f . Par exemple, si Ω_1 est une plaque inhomogène à laquelle, on fait subir divers traitements, on peut se demander comment seront réparties les inhomogénéités de la plaque transformée.

Définition A.4 Soit $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ un espace mesuré et d'une application mesurable f de $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ dans $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, la mesure image de μ par f , notée $f^*\mu$ est définie par :

$$f^*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)) \text{ pour tout } A \in \mathcal{A}_2.$$

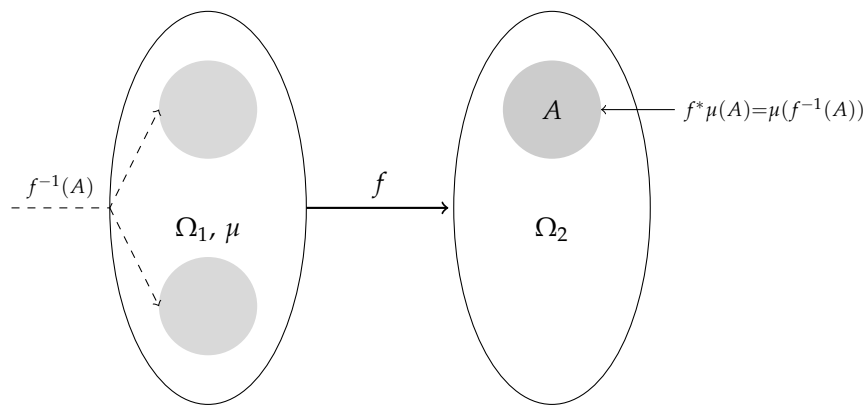


FIGURE A.1: Mesure image

A.3 Intégration

Définition A.5 Une fonction mesurable $f : (E, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{R}^+$ est dite étagée si elle prend un nombre fini de valeurs. On note \mathfrak{E} l'ensemble des fonctions étagées.

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les valeurs possibles de f et $A_k = \{x \mid f(x) = \alpha_k\}$ pour $k = 1, \dots, n$. On peut toujours écrire

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{1}_{A_k}(x).$$

On remarque que les A_k sont disjoints deux à deux et les α_k tous distincts et non nuls.

Dans la suite, on supposera toujours que la décomposition d'une fonction étagée est celle là.

Lemme A.6 Toute fonction mesurable positive est limite simple croissante de fonctions étagées : $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \uparrow f$.

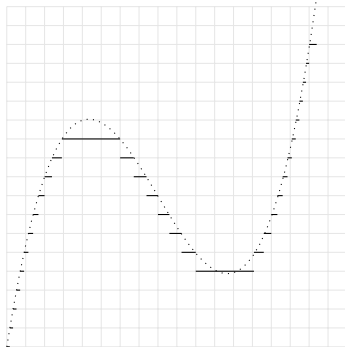


FIGURE A.2: Une fonction (en pointillés) et son approximation par une fonction étagée. Comme la fonction est très régulière pour les besoins du dessin, les A_i sont des réunions d'intervalle mais pour une fonction mesurable quelconque (non continue), ce ne sera plus le cas.

On peut maintenant définir l'intégrale par rapport à une mesure μ quelconque.

Définition A.7 L'intégrale de $f \in \mathfrak{E}$ est naturellement définie par

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

Dans ce qui suit, on manipule des fonctions qui valent éventuellement $\pm\infty$ en certains points. On est donc obligé de travailler avec des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. L'arithmétique dans cet espace est l'arithmétique usuelle selon les conventions suivantes.

- $a + (+\infty) = +\infty$, pour tout $a \in \overline{\mathbf{R}}$,
- $\infty \cdot 0 = 0$, i.e. 0 reste absorbant pour la multiplication
- toute série à termes positifs converge dans $\overline{\mathbf{R}}$, c'est-à-dire vers éventuellement $+\infty$.

Définition A.8 Pour f mesurable positive, on définit

$$\int f \, d\mu = \sup_{g \in \mathfrak{E}} \left\{ \int g \, d\mu, 0 \leq g \leq f \right\} \in \overline{\mathbf{R}}^+.$$

Lemme A.9 Soient $a, b \geq 0$ et f, g deux fonctions étagées positives. Alors

$$\int (af + bg) \, d\mu = a \int f \, d\mu + b \int g \, d\mu.$$

Pour une fonction de signe quelconque, on considère

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \text{ et } f^-(x) = \min(-f(x), 0).$$

Il est évident que

$$f^+ + f^- = |f| \text{ et que } f^+ - f^- = f.$$

L'idée est de définir l'intégrale de f comme la différence des intégrales de f^+ et f^- . Cela n'est possible que si ces deux quantités sont finies or ceci est impliqué par la condition que l'intégrale de $|f|$, qui est bien définie puisque $|f|$ est positive, soit finie. De cette discussion, on déduit la définition suivante.

Définition A.10 Soit $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ mesurable telle que $\int f^+ d\mu$ ou $\int f^- d\mu$ soit finie, on pose

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

La fonction est dite μ -intégrable si $\int f^+ d\mu$ et $\int f^- d\mu$ sont finies.

Lemme A.11 Soient f, g deux fonctions mesurables de $E \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$, dont les intégrales sont définies. Alors

- 1) $f \leq g$ implique $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.
- 2) $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.

Les trois théorèmes importants sont les suivants.

Théorème A.12 — Convergence monotone. Soient f, f_n ($n \in \mathbf{N}$) des fonctions mesurables de $E \rightarrow \overline{\mathbf{R}}^+$ telles que $0 \leq f_n \uparrow f$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Théorème A.13 — Lemme de Fatou. Soit $(f_n, n \geq 1)$ une suite de fonctions (mesurables) positives,

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Théorème A.14 — Convergence dominée. Soit $(f_n, n \geq 1)$ une suite de fonctions (mesurables) qui converge simplement vers f . Si de plus, il existe g telle que

$$|f_n(x)| \leq g(x), \text{ pour tout } x \text{ et } \int g d\mu < \infty$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu = \int f d\mu.$$

Si on dispose de deux espaces mesurés $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \nu)$, on veut construire une mesure sur le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2$. La première difficulté à surmonter est la définition de la tribu sur $E \times F$. Les éléments de $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ sont les produits cartésiens d'un élément de \mathcal{A}_1 et d'un élément de \mathcal{A}_2 . Comme la réunion de deux rectangles n'est pas un rectangle, $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ n'est pas une tribu. Qu'à cela ne tienne, on note $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ la plus petite tribu qui contient $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ et le tour est joué!

Théorème A.15 — Fubini. Soit $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés avec μ_1 et μ_2 σ -finies. Il existe une unique mesure, notée $\mu \otimes \nu$, dite mesure produit de μ et ν , sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ qui soit telle que

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B), \text{ pour tout } A \in \mathcal{A}_1, B \in \mathcal{A}_2. \quad (\text{A.2})$$

Par ailleurs, soit $f: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbf{R}$, mesurable, satisfaisant l'une des deux conditions suivantes :

- (1) f est positive.
- (2) La fonction f est intégrable par rapport à la mesure $\mu_1 \otimes \mu_2$:

$$\int |f| \, d\mu_1 \otimes \mu_2 < +\infty.$$

L'identité suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1) \\ = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_2(\omega_2) \\ = \int f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2). \end{aligned}$$

Ensembles μ -négligeables

Définition A.16 Un ensemble μ -négligeable est un ensemble $N \subset E$ (pas nécessairement mesurable au départ) qui peut être inclus dans un ensemble mesurable A tel que $\mu(A) = 0$.

Les ensembles mesurables de mesure nulle jouent un rôle particulier parce qu'ils ne sont pas « visibles » par la mesure même s'ils sont non vides.

Définition A.17 — Presque-partout, presque-sûre. On dit d'une propriété qu'elle est vraie μ -presque-partout ou μ -presque-sûrement, en abrégé μ -p.p. ou μ -p.s., lorsque son complémentaire est de

mesure nulle.

L'écriture « $0 \leq f_n \uparrow f$ μ -p.p. » signifie qu'il existe un ensemble $N \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(N) = 0$ et tel que pour tout $x \in E \setminus N$, $f_n(x)$ est une suite positive croissante convergeant vers $f(x)$.

Soit (E, \mathcal{E}, μ) un espace probabilisé. Soit f une fonction mesurable positive de μ -intégrale nulle. Pour tout $n > 0$ et $A_n = \{x : f(x) > 1/n\}$,

$$0 = \int f \, d\mu \geq \int_{A_n} f \, d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(A_n),$$

donc $\mu(A_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Comme $\cap_{n \geq 1} A_n = A_0$, par monotonie, on obtient $\mu(A_0) = 0$. On a donc démontré le théorème suivant :

Théorème A.18 Soit f une fonction mesurable positive, de μ -intégrale nulle alors f est nulle μ -presque partout.

Mais une fonction nulle « presque partout » n'est pas une fonction nulle. Par exemple, la fonction indicatrice de \mathbf{Q} , l'ensemble des rationnels, est presque-partout nulle pour la mesure de Lebesgue mais elle est non nulle sur un ensemble dense !

Ainsi, l'application $f \mapsto \int |f| \, d\mu$ ne définit pas une norme sur l'espace vectoriel $L^1(\mu)$, car la nullité de l'intégrale n'implique pas la nullité de la fonction. Afin de construire une norme, il faut que deux fonctions qui sont égales μ -p.p. soient identifiées comme un seul et même élément. Formellement, cela revient à définir la relation d'équivalence suivante.

f est en relation d'égalité p.p. avec g lorsque $\mu(f \neq g) = 0$. On note $f \mathcal{R} g$.

On définit alors $L^1(\mu)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence de la relation \mathcal{R} , et l'application qui à toute classe d'équivalence c associe la valeur $\int |f| \, d\mu$ pour une fonction f quelconque de la classe c définit bien une norme sur $L^1(\mu)$ puisque tous les éléments d'une même classe d'équivalence ont la même intégrale.

Dans la pratique, travailler avec des classes d'équivalence est fastidieux, on peut continuer de penser les fonctions mesurables comme des fonctions ordinaires en prenant garde qu'elles ne sont définies qu'à un ensemble de mesure nulle près.

Cela implique que parler de la valeur d'une fonction mesurable, définie sur \mathbf{R}^n muni de la mesure de Lebesgue, en un point, sans hypothèse de continuité, n'a aucun sens puisqu'un point est de mesure nulle !

Les théorèmes de convergence monotone, Fatou, convergence dominée sont valables sans changement à condition de spécifier des *presque-partout* chaque fois que nécessaire. Ainsi dans le théorème de convergence dominée, la convergence de f_n vers f peut n'avoir lieu

que μ -p.p. et la relation de domination peut n'être satisfaite qu'à un ensemble négligeable près.

Espaces L^p

Définition A.19 Pour $p \in [1, \infty[$, l'espace $L^p(\mu)$ est l'espace des fonctions mesurables (définies à un ensemble μ négligeable près) telles que

$$\int |f|^p d\mu < \infty.$$

On en fait un espace normé en posant

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Définition A.20 Pour une fonction mesurable f , on définit son sup-essentiel par

$$\text{ess-sup } f = \inf\{M, |f(x)| \leq M \mu - \text{p.p.}\}.$$

Une fonction dont le sup-essentiel est fini appartient à $L^\infty(\mu)$ et

$$\|f\|_\infty = \text{ess-sup } f.$$

Si l'on instancie μ en la mesure de comptage sur $E = \mathbf{N}$ ou \mathbf{Z} on parle plus volontiers de suite que de fonctions et on note $l^p(\mathbf{N})$, respectivement $l^p(\mathbf{Z})$, l'ensemble des suites p -sommables : les suites de terme général u_n indexées par \mathbf{N} ou \mathbf{Z} telles que

$$\sum_n |u_n|^p < \infty.$$