



Analyse fonctionnelle et convexe

Session principale 1A

Durée : 2h

Notes de cours et notes de TD autorisées

Calculatrices interdites

1 Fonctions conjuguées

On note $\mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}$ (respectivement $(\mathbf{R}^+)^{\mathbf{N}^*}$), l'ensemble des suites de réels (respectivement de réels positifs). L'élément générique de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}$ est noté $u = (u_n, n \geq 1)$. Soit $(u^k, k \geq 1)$ une suite d'éléments de $(\mathbf{R}^+)^{\mathbf{N}^*}$ telle qu'il existe $u \in (\mathbf{R}^+)^{\mathbf{N}^*}$ satisfaisant

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_n. \quad (1)$$

On rappelle que le lemme de Fatou stipule alors

$$\sum_{n \geq 1} u_n \leq \liminf_k \sum_{n \geq 1} u_n^k. \quad (\mathcal{F})$$

Chacun des deux termes pouvant prendre la valeur « infini ».

On considère l'espace de Hilbert

$$E = \ell^2(\mathbf{N}^*) = \left\{ u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}, \sum_{n \geq 1} u_n^2 < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n \geq 1} u_n v_n.$$

- 1) Soit $(u^k, k \geq 0)$ une suite d'éléments de E qui converge vers u . Montrer que (1) est satisfaite.

Soit la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ u = (u_n, n \geq 1) &\longmapsto \sum_{n \geq 1} n u_n^2. \end{aligned}$$

- 2) Montrer que le domaine de φ est un sous-espace vectoriel non vide de E .
 3) Est-ce que le domaine de φ est fermé ou dense dans E ?
 4) Montrer que φ est convexe.
 5) Montrer que φ est semi continue inférieurement. Est-ce que φ est continue?
 6) Soit $k \geq 1$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, montrer

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} (\alpha x - kx^2) = \frac{\alpha^2}{4k}.$$

- 7) Calculer la fonction conjuguée de φ .

2 Fonctions quasi-convexes

Définition 1. Une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite quasi-convexe si pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, l'ensemble

$$F_\lambda = \{x \in E, f(x) \leq \lambda\} \text{ est convexe.}$$

- 8) Montrer qu'une fonction convexe est quasi-convexe.
 9) Soit $f(x) = x^2 \mathbf{1}_{[-1, +\infty[}(x)$. Dessinez un prolongement quasi-convexe et un prolongement non quasi-convexe de f .
 10) Montrer que $(x \mapsto \sqrt{|x|})$ est quasi-convexe.
 11) Montrer que le supremum d'une famille de fonctions quasi-convexes est quasi-convexe.

On considère la propriété suivante

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \forall \alpha \in [0, 1], f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max(f(x), f(y)). \quad (2)$$

12) Montrer que si f est quasi-convexe alors f satisfait (2).

13) Établir la réciproque.

On considère f une fonction dérivable sur $]a, b[$. On veut montrer que

Théorème 1. f est quasi-convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in]a, b[, f(y) \leq f(x) \implies f'(x)(y - x) \leq 0. \quad (3)$$

On suppose f quasi-convexe et $f(y) \leq f(x)$.

14) Montrer que

$$f'(x)(y - x) \leq 0. \quad (4)$$

Indication : On pourra revenir à la définition de la dérivée comme limite des taux d'accroissement.

Pour la réciproque, supposons que l'implication (3) soit vraie et l'on fixe $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $f(y) \leq f(x)$. On suppose qu'il existe

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \text{ avec } \lambda \in]0, 1[$$

tel que $f(z) > f(x)$.

15) Montrer que

$$f'(z) = 0.$$

On considère

$$A = \{\lambda \in]0, 1[, f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > f(x)\}.$$

16) Montrer que A est un ensemble ouvert non vide.

17) En déduire qu'il existe $0 < a < b < 1$ tels que $\lambda_z \in]a, b[$ et

$$\forall \lambda \in]a, b[, f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = f(z).$$

18) Quelle est la contradiction ?

Définition 2. Un point x est un maximum local si

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } y \in D \cap B(x, \epsilon) \implies (f(y) < f(x)).$$

On veut maintenant montrer le principe du maximum suivant.

Théorème 2 (Principe du maximum). Soit D un convexe fermé de \mathbf{R} et $f : D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ quasi-convexe. Un maximum local strict de f sur D est forcément situé sur la frontière de D .

On suppose que \bar{x} est un maximum local strict et qu'il appartient à l'intérieur de D . Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que

$$B(\bar{x}, \epsilon) \subset D.$$

Pour $n \geq 1$, on pose

$$F_n = \left\{ y \in B(\bar{x}, \epsilon), f(y) \leq f(\bar{x}) - \frac{1}{n} \right\}.$$

19) Montrer que tous les F_n sont convexes.

20) Montrer que

$$\bigcup_{n \geq 1} F_n = B(\bar{x}, \epsilon) \setminus \{\bar{x}\}.$$

21) Conclure.

Correction

1 ▷ On a de manière évidente

$$|u_n^k - u_n|^2 \leq \|u^k - u\|_E^2,$$

d'où le résultat.

2 ▷ La suite $u_n = 1/n^2$ appartient à $\text{Dom } f$ donc il est non vide. En utilisant l'identité

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

on montre que $\text{Dom } \varphi$ est un espace vectoriel.

3 ▷ Si v est orthogonal à $\text{Dom } \varphi$, v est orthogonal à tout vecteur de la base canonique de E qui appartient aussi à $\text{Dom } \varphi$ donc $v = 0$.

4 ▷ Immédiat d'après la convexité de $x \mapsto x^2$.

5 ▷ Il suffit d'appliquer le lemme de Fatou rappelé dans les préliminaires pour vérifier le critère : pour toute suite $(u^k, k \geq 1)$ d'éléments de E , convergeant vers u dans E ,

$$\varphi(u) \leq \liminf_k \varphi(u^k).$$

La suite

$$u^k = k^{-1}e_k$$

est de norme $1/k^2$ donc tend vers 0_E . Par contre,

$$\varphi(u^k) = 1$$

donc φ n'est pas continue.

6 ▷

$$\frac{d}{dx}(\alpha x - kx^2) = \alpha - 2kx$$

donc le maximum est atteint en $x = \alpha/2k$ et donne le résultat demandé.

7 ▷ Soit v un autre élément de E ,

$$\begin{aligned}\varphi^*(v) &= \sup_{u \in E} (\langle u, v \rangle - \varphi(u)) \\ &= \sup_{u \in E} \left(\sum_{n \geq 1} u_n v_n - n u_n^2 \right) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{v_n^2}{4n}.\end{aligned}$$

De plus pour

$$u = \sum_{n \geq 1} \frac{v_n}{2n} e_n,$$

la borne est atteinte donc

$$\varphi^*(v) = \sum_{n \geq 1} \frac{v_n^2}{4n}.$$

8 ▷ Evident.

10 ▷ On a

$$\{x, \sqrt{|x|} \leq \lambda\} = [-\lambda^2, \lambda^2]$$

qui est bien convexe.

11 ▷ On a

$$\{x, \sup_{i \in I} f_i(x) \leq \lambda\} = \bigcap_{i \in I} \{x, f_i(x) \leq \lambda\},$$

et l'intersection de convexes est un convexe.

12 ▷ x et y appartiennent à l'ensemble

$$\{z, f(z) \leq \max(f(x), f(y))\}$$

donc tout point du segment $[x, y]$ aussi.

13 ▷ Soit x et y dans F_λ . On a

$$\max(f(x), f(y)) \leq \lambda$$

donc tout élément du segment $[x, y]$ est dans F_λ , i.e. F_λ est convexe.

14 ▷ Comme $(1 - \alpha)x + \alpha y = x + \alpha(y - x)$, on a

$$f(x + \alpha(y - x)) - f(x) \leq 0$$

pour tout $\alpha \in [0, 1]$. En divisant par α et en faisant tendre α vers 0, on tire (4).

15 ▷ On applique (3) aux couples (x, z) et (y, z) d'où

$$\begin{aligned} f'(z)(x - z) &\leq 0 \\ f'(z)(y - z) &\leq 0. \end{aligned}$$

Comme $(x - z)(y - z) \leq 0$, il faut que $f'(z)$ pour que les deux identités soient vérifiées simultanément.

16 ▷ A contient z donc il n'est pas vide. Comme f est dérivable, elle est continue donc l'application

$$\lambda \mapsto f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - f(x)$$

est continue. Par conséquent, A est l'image réciproque de l'ouvert \mathbf{R}_*^+ par une fonction continue donc A est ouvert.

17 ▷ Soit $]a, b[$ la composante connexe de A contenant λ_z . D'après les questions précédentes, f' est nulle sur $]a, b[$ donc f est constante égale à $f(z)$ sur cet intervalle.

18 ▷ Les points x et y appartiennent à $F_{f(x)}$ mais il y a une partie non vide du segment $[x, y]$ qui n'y appartient pas donc $F_{f(x)}$ n'est pas convexe.

19 ▷ Conséquence immédiate de la quasi-convexité.

20 ▷ Conséquence de la définition du maximum local.

21 ▷ La réunion de convexes est convexe or $B(\bar{x}, \epsilon) \setminus \{\bar{x}\}$ ne l'est pas. Il n'est pas donc pas possible que x soit dans l'intérieur de D . Il ne peut être que dans la frontière de D .