



**Analyse fonctionnelle et convexe**  
Session principale 1A 2022-2023  
Durée : 2h  
Notes de cours et notes de TD autorisées  
Calculatrices interdites

*Sujet de 4 pages. Les exercices sont totalement indépendants. Je sais, c'est long.  
La notation en tiendra compte.*

## 1 Base de Haar

On considère  $E = L^2([0, 1], \text{Leb})$ , l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable :

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Le produit scalaire de deux éléments  $f$  et  $g$  de  $E$  est donné par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt.$$

*On ne se posera aucune question existentielle sur la théorie de la mesure. On rappelle que pour toute fonction  $f \in E$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $f_\varepsilon$  continue sur  $[0, 1]$  telle que*

$$\|f - f_\varepsilon\|_E \leq \varepsilon. \tag{1}$$

On pose

$$\psi(x) = \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}[}(x) - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1[}(x).$$

On pose aussi

$$\psi_{00} = \psi.$$

Pour  $k \geq 1$  et  $j$  entier telle que

$$0 \leq j < 2^k,$$

on pose

$$\psi_{kj}(x) = 2^{k/2} \psi(2^k x - j).$$

On note  $\mathbf{1}$  la fonction constante égale à 1. On appelle base de Haar, la famille de fonctions

$$\{\mathbf{1}\} \cup \{\psi_{kj}, k \geq 0, 0 \leq j < 2^k\}.$$

- 1) Représenter les fonctions  $\psi_{00}, \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{2j}$  pour  $j = 0, \dots, 3$ .
- 2) Montrer que pour tous les entiers  $k, j, k', j'$ ,

$$\int_0^1 \psi_{kj}(t) \psi_{k'j'}(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } k = k' \text{ et } j = j' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer aussi que  $\psi_{kj}$  est orthogonal à la fonction  $\mathbf{1} := \mathbf{1}_{[0,1]}$ .

On pose  $M_0 = \text{Vect}(\{\mathbf{1}\})$  et pour  $n \geq 1$ ,

$$M_n = \text{Vect}(\{\mathbf{1}\} \cup \{\psi_{kj}, 0 \leq k < n, 0 \leq j < 2^k\}),$$

l'espace vectoriel engendré par la fonction  $\mathbf{1}$  et les  $\psi_{kj}$  pour  $k < n$ .

- 3) Montrer que

$$M_1 = \text{Vect}(\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}[}, \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1[}).$$

Plus généralement, on admettra que, de même, on a

$$M_n = \text{Vect}(\mathbf{1}_{[j2^{-n}, (j+1)2^{-n}[}, 0 \leq j < 2^n).$$

On remarquera pour la suite que  $M_n \subset M_{n+1}$ . On pose

$$M = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n.$$

On veut montrer que  $M$  est dense dans  $E$ . Soit  $h$  continue sur  $[0, 1]$ , on définit la fonction  $\Pi_n h$  par

$$(\Pi_n h)(t) = \sum_{j=0}^{2^n-1} h\left(\frac{j}{2^n}\right) \mathbf{1}_{[j2^{-n}, (j+1)2^{-n}[}(t). \quad (2)$$

- 4) Montrer que  $(\Pi_n h, n \geq 1)$  converge uniformément vers  $h$ .
- 5) Montrer que  $(\Pi_n h, n \geq 1)$  converge dans  $E$  vers  $h$ .
- 6) En utilisant (1) et ce qui précède, montrer que  $M$  est dense dans  $E$ .

Pour  $f \in E$ , pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose

$$H_n f = \langle f, \mathbf{1} \rangle \mathbf{1} + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^k-1} \langle f, \psi_{kj} \rangle \psi_{kj}.$$

- 7) Que signifie l'écriture

$$f = \langle f, \mathbf{1} \rangle \mathbf{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} \langle f, \psi_{kj} \rangle \psi_{kj} ? \quad (3)$$

Pourquoi est-elle vraie ?

On pose  $\varphi = \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}[}$  et

$$F = \{f \in E, \int_0^1 f(t) \varphi(t) dt = 0\} = \text{Vect}\{\varphi\}^\perp.$$

- 8) Quel est le développement sur la base de Haar de  $\varphi$  ?
- 9) Est-ce que  $F$  est un sous-espace vectoriel fermé ou ouvert de  $E$  ?
- 10) En déterminer une base orthonormale complète.

## 2 Fonction d'appui

On travaille dans  $\mathbf{R}^2$ . On note le produit scalaire usuel par

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

On note  $0$  le point de coordonnées  $(0, 0)$ . On rappelle que le produit scalaire est continue :

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

est continue. Pour  $x = (x_1, x_2)$ , on pose

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

On note  $\mathbb{S}$ , le disque unité

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbf{R}^2, \|x\| = 1\}.$$

Soit  $C$  un convexe compact contenant 0, on définit sa fonction d'appui par

$$s_C : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$y \longmapsto \sup_{x \in C} \langle x, y \rangle.$$

- 11) Montrer que  $s_C$  prend des valeurs positives ou nulles mais finies.
- 12) Que vaut  $s_C$  pour  $C = \overline{B}(0, 1) = \{x \in \mathbf{R}^2, \|x\| \leq 1\}$  ?
- 13) Montrer que  $s_C$  est semi-continue inférieurement.
- 14) Montrer que pour tout  $y \in \mathbb{S}$ , il existe  $x_y \in C$  tel que

$$s_C(y) = \langle x_y, y \rangle.$$

On veut maintenant montrer que  $s_C$  est semi-continue supérieurement, c'est-à-dire que pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,

$$U_\lambda = \{y, s_C(y) > \lambda\}$$

est un ouvert. On fixe  $\lambda \geq 0$  et  $y$  tel que  $s_C(y) > \lambda$ .

- 15) Montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\|y' - y\| \leq \delta \implies s_C(y') > \lambda.$$

Il s'ensuit que  $s_C$  est semi-continue supérieurement et donc continue.

Il est évident que si  $C = D$  alors  $s_C = s_D$ . On veut montrer la réciproque. Soit  $C$  et  $D$  deux convexes compacts contenant 0 tels que  $s_C = s_D$ . On suppose que  $C$  n'est pas inclus dans  $D$ .

- 16) En utilisant l'un des théorèmes de séparation, montrer qu'alors il existe  $\zeta \in \mathbb{S}$  tel que  $s_D(\zeta) < s_C(\zeta)$ .
- 17) Conclure.

Soit une fonction  $s$  dont on sait qu'elle est la fonction support d'un convexe compact contenant 0, noté  $C$ , inconnu de  $\mathbf{R}^2$ .

- 18) Écrire  $C$  comme intersection de demi-espaces définis par  $s$ .

## Correction

1 ▷

2 ▷ On a

$$\psi(2^k x - j) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq 2^k x - j < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq 2^k x - j < 1 \end{cases}$$

soit

$$\psi_{k,j}(x) = \mathbf{1}_{[j2^{-k}, j2^{-k} + 2^{-(k+1)}[} - \mathbf{1}_{[j2^{-k} + 2^{-(k+1)}, (j+1)2^{-k}[}.$$

Pour  $k = k'$  et  $j = j'$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi_{kj}(t)^2 dt &= 2^k \int_0^1 \psi(2^k t - j)^2 dt \\ &= 2^k \left( 2^{-(k+1)} + (2^{-k} - 2^{-(k+1)}) \right) \\ &= 2^k \left( 2^{-(k+1)} + 2^{-(k+1)} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Si  $k = k'$  et  $j \neq j'$  alors les supports de  $\psi_{kj}$  et  $\psi_{kj'}$  sont disjoints donc l'intégrale est nulle.

Si  $k < k'$ , on pose

$$I_{kj} = [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}]$$

qui est un intervalle de longueur  $2^{-k}$ . Les intervalles  $I_{k'j'}$  sont de longueur  $2^{-k'}$  donc au moins deux fois plus courts que les  $I_{kj}$ . On a 3 situations, possibles  $I_{kj} \cap I_{k'j'} = \emptyset$  et l'intégrale est nulle. Soit  $I_{k'j'}$  est dans la partie basse de  $I_{kj}$ , i.e.

$$I_{k'j'} \subset [j2^{-k}, j2^{-k} + 2^{-(k+1)}[$$

soit dans la partie haute. Dans les deux cas,  $\psi_{k,j}$  est constante sur des intervalles. On obtient

$$\int_0^1 \psi_{kj}(t) \psi_{k'j'}(t) dt = \text{signe}(\psi_{kj}) \int_{[j'2^{-k'}, (j'+1)2^{-k'}[} \psi_{k'j'}(x) dx = 0$$

puisque  $\psi$  passe de +1 à -1 sur cet intervalle.

**3 ▷** On a

$$M_1 = \text{Vect}(\mathbf{1}, \psi_{00}).$$

D'après la définition de  $\psi_{00}$ , on a  $\psi_{00} \in \text{Vect}(\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}[}, \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1[})$ . Comme

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}[} + \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1[}$$

on a

$$M_1 \subset \text{Vect}(\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}[}, \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1[}).$$

Réciproquement il reste à montrer que l'on peut écrire  $\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}[}$  à l'aide de combinaisons linéaires de  $\mathbf{1}$  et  $\psi_{00}$ . Or

$$\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}[} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \psi_{00}).$$

On peut faire pareil pour l'autre indicatrice.

**4 ▷**  $h$  est uniformément continue donc pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|x - y| \leq \delta \implies |h(x) - h(y)| \leq \varepsilon.$$

Soit  $n_0$  tel que  $2^{-n_0} \leq \delta$ , on a pour tout  $n \geq n_0$ , pour tout  $x \in [j2^{-n}, (j+1)2^{-n}[$ ,

$$|h(x) - h\left(\frac{j}{2^n}\right)| \leq \varepsilon.$$

Comme les intervalles  $[j2^{-n}, (j+1)2^{-n}[$  forment une partition de  $[0, 1[$ , on a bien

$$|(\Pi_n h)(t) - h(t)| \leq \varepsilon$$

pour  $n \geq n_0$ .

**5 ▷** Comme

$$\left(\int_0^1 f(t)^2 dt\right)^{1/2} \leq \|f\|_\infty,$$

la convergence uniforme implique la convergence dans  $E$ .

**6 ▷** Soit  $h \in E$  et  $\varepsilon > 0$  fixé. On considère  $h_\varepsilon$ , fonction continue, donnée par (1) telle que

$$\|h - h_\varepsilon\|_E \leq \varepsilon.$$

On considère ensuite  $\Pi_n h_\varepsilon$  donnée par (2). Pour  $n$  assez grand, d'après la question précédente, on a

$$\|h_\varepsilon - \Pi_n h_\varepsilon\|_E \leq \varepsilon$$

d'où

$$\|h - \Pi_n h_\varepsilon\|_E \leq 2\varepsilon.$$

D'après son expression, il est évident que  $\Pi_n h_\varepsilon$  est dans  $M$ .

**7 ▷** L'écriture (3) signifie que

$$\|f - H_n f\|_E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Elle est vraie en vertu du théorème 7.20 du cours puisqu'on a une famille orthonormale dense dans l'espace de Hilbert  $E$ .

**8 ▷** On a

$$\varphi = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \psi_{00}).$$

**9 ▷** Un orthogonal est toujours fermé.

**10 ▷** D'après (3),

$$f = \langle f, \mathbf{1} \rangle \mathbf{1} + \langle f, \psi_{00} \rangle \psi_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} \langle f, \psi_{kj} \rangle \psi_{kj}$$

donc

$$\langle f, \varphi \rangle = \frac{1}{2} \langle f, \mathbf{1} \rangle + \frac{1}{2} \langle f, \psi_{00} \rangle.$$

Par conséquent,

$$f \in F \iff \langle f, \mathbf{1} \rangle = -\langle f, \psi_{00} \rangle$$

Soit

$$f = \langle f, \mathbf{1} \rangle (\mathbf{1} - \psi_{00}) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} \langle f, \psi_{kj} \rangle \psi_{kj}$$

Donc une base orthogonale de  $F$  est

$$(\mathbf{1} - \psi_{00}, \psi_{kj}, k \geq 1, 0 \leq j < 2^k).$$

Comme

$$\mathbf{1} - \psi_{00} = 2 \mathbf{1}_{[1/2, 1[}$$

sa norme dans  $E$  vaut

$$2 \left( \int_{1/2}^1 1^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

donc une base orthonormale de  $F$  est donnée par

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{1} - \psi_{00}), \psi_{kj}, k \geq 1, 0 \leq j < 2^k \right).$$

**11 ▷** Comme  $O$  appartient à  $C$ ,

$$s_C(y) \geq \langle 0, y \rangle = 0.$$

D'après Cauchy-Schwarz,

$$s_C(y) \leq \|y\| \sup_{x \in C} \|x\|.$$

Comme  $\|y\| = 1$  et  $C$  est compact donc borné, le terme de droite est fini.

**12 ▷** Pour une direction  $y$ , on considère  $y^\top$  sa direction orthogonale. Pour tout  $x \in \mathbf{R}^2$ ,

$$x = \langle x, y \rangle y + \langle y^\top, x \rangle y^\top$$

donc la deuxième composante ne contribue pas au produit scalaire de  $x$  par  $y$ . On est donc ramené à calculer

$$\sup_{\lambda \in \mathbf{R}, \lambda y \in B(0,1)} \langle \lambda y, y \rangle = \sup_{|\lambda| \leq 1} \lambda = 1.$$



**13 ▷**  $s_C$  est le sup de fonctions continues donc s.c.i., par conséquent  $s_C$  est s.c.i.

**14 ▷** L'ensemble  $C$  est compact et le produit scalaire est une application continue donc l'application  $y \mapsto \langle x, y \rangle$  atteint ses bornes d'où l'existence de  $x_y$ .

**15 ▷** On a

$$s_C(y) = \langle x_y, y \rangle > \lambda.$$

Par Cauchy-Schwarz, on a

$$|\langle y - y', x_y \rangle| \leq \|y - y'\| \|x_y\|.$$

Si  $\delta$  est tel que

$$\|x_y\| \delta \leq \frac{s_C(y) - \lambda}{2}$$

alors

$$\|y' - y\| \leq \delta \implies \langle x_y, y' \rangle \geq s_C(y) - \frac{s_C(y) - \lambda}{2} = \frac{1}{2}(s_C(y) + \lambda) > \lambda.$$

La boule  $B(y, \delta)$  est incluse dans  $U_\lambda$  donc cet ensemble est ouvert.

**16 ▷** Il existe  $x \in C$  qui n'est pas dans  $D$ . Comme  $D$  est compact donc fermé, on peut séparer au sens strict  $D$  et  $\{x\}$ , donc il existe  $\zeta$  (que l'on peut choisir de norme 1) tel que

$$\sup_{y \in D} \langle y, \zeta \rangle \leq \alpha < \langle x, \zeta \rangle,$$

soit

$$s_D(\zeta) < \langle x, \zeta \rangle \leq s_C(\zeta).$$

**17 ▷** Si  $s_C = s_D$  alors il n'existe pas d'éléments de  $C$  qui ne soit pas dans  $D$  d'après la question précédente, soit  $C \subset D$ . On procède de même avec  $D$  et  $C$  d'où  $D \subset C$  et donc  $D = C$ .

**18 ▷** Par définition de la fonction d'appui,

$$C \subset \bigcap_{y \in \mathbb{S}} \{x, \langle x, y \rangle \leq s(y)\}.$$

Réciproquement si  $x$  appartient à cette intersection (qui est une intersection de fermés donc fermée) et  $x \notin C$ , il existe  $\zeta \in \mathbb{S}$  tel que

$$\sup_{z \in C} \langle z, \zeta \rangle < \langle x, \zeta \rangle$$

soit

$$s(\zeta) < \langle x, \zeta \rangle$$

donc

$$x \notin \{z, \langle z, \zeta \rangle \leq s(\zeta)\},$$

ce qui est contraire à l'hypothèse faite.