



## **Analyse fonctionnelle et convexe**

Session de rattrapage 1A

Durée : 1h

Notes de cours et notes de TD autorisées

Calculatrices interdites

### 1 Fonctions conjuguées

1) Etudier et représenter la fonction

$$h : ]-1, 1[ \mapsto \mathbf{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| \leq 1 \\ +\infty & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

2) Calculer la fonction convexe conjuguée de  $f$ .

## 2 Intérieur d'ensembles convexes

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $C$  un convexe de  $E$ . Pour deux sous-ensembles  $A$  et  $B$ , pour  $t \in [0, 1]$ , on définit leur combinaison convexe par

$$tA + (1 - t)B = \{u, \exists u_A \in A, \exists u_B \in B \text{ et } u = tu_A + (1 - t)u_B\}.$$

3) Soit  $x, y$  deux éléments de  $E$  et  $\epsilon > 0$ . Montrer que

$$tB(x, \epsilon) + (1 - t)B(y, \epsilon) = B(tx + (1 - t)y, \epsilon).$$

4) Montrer que l'intérieur de  $C$  est convexe.

## 3 Lemme de Stampachia

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  son produit scalaire et  $\|\cdot\|$  sa norme. Soit  $A$  linéaire continue de  $H$  dans  $H$  : il existe  $C > 0$  tel que

$$\|Au\| \leq C\|u\|, \quad \forall u \in H.$$

On suppose de plus que  $A$  est *coercive* : il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\langle Au, u \rangle \geq \alpha\|u\|^2.$$

Soit  $K$  un convexe fermé non vide de  $H$  et  $f \in H$ . On veut montrer qu'il existe  $u \in K$  tel que

$$\langle Au, v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle, \quad \forall v \in K. \quad (1)$$

Soit  $\rho > 0$  que l'on fixera à la fin.

5) En utilisant la caractérisation du projeté orthogonal dans un espace de Hilbert, montrer que (1) est équivalente à

$$u = P_K(\rho f - \rho Au + u) \quad (2)$$

où  $P_K$  est le projecteur orthogonal sur  $K$ .

On définit l'application  $S$  par

$$\begin{aligned} S : H &\longrightarrow H \\ v &\longmapsto P_K(\rho f - \rho Av + v). \end{aligned}$$

6) Montrer que

$$\forall v_1, v_2 \in H, \|Sv_1 - Sv_2\| \leq \|(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)\|.$$

7) En utilisant la coercivité de  $A$ , montrer que

$$\forall v_1, v_2 \in H, \|Sv_1 - Sv_2\|^2 \leq \|v_1 - v_2\|^2(1 - 2\rho\alpha + \rho^2C^2).$$

8) Montrer que l'on peut choisir  $\rho$  de sorte que  $S$  soit contractante et conclure.

## Correction

**1 ▷** On en déduit que  $h$  est un homéomorphisme de  $] -1, 1[$  sur  $\mathbf{R}$ .

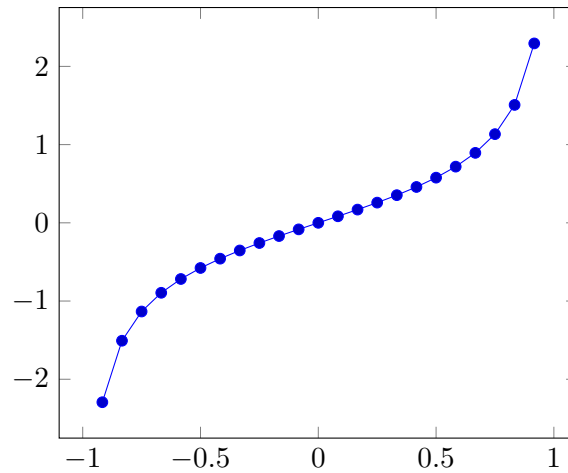


FIGURE 1 – La courbe représentative de  $h$ .

**2 ▷** Posons

$$\theta(x) = xy - f(x).$$

On a

$$\theta'(x) = y - h(x).$$

Comme  $h$  est bijective, pour tout  $y$ , il existe une seule valeur de  $x$  telle que  $\theta'(x) = 0$ . L'équation  $y = h(x)$  s'écrit :

$$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Elle est équivalente

$$x = \text{signe}(y) \sqrt{\frac{y^2}{1+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Au final, le supremum de  $\theta$  vaut

$$\theta\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = \frac{y^2}{\sqrt{1+y^2}} + f\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = \sqrt{1+y^2}.$$

**3 ▷** Soit  $u \in tB(x, \epsilon) + (1-t)B(y, \epsilon)$ . On a

$$\begin{aligned}\|u - (tx + (1-t)y)\| &= \|t(u_x - x) + (1-t)(u_y - y)\| \\ &\leq t\epsilon + (1-t)\epsilon \\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$

donc

$$tB(x, \epsilon) + (1-t)B(y, \epsilon) \subset B(tx + (1-t)y, \epsilon).$$

Réciproquement, soit  $u \in B(tx + (1-t)y, \epsilon)$ . On pose

$$\rho = tx + (1-t)y$$

et on définit

$$\begin{aligned}u_x &= x + (u - \rho) \\ u_y &= y + (u - \rho)\end{aligned}$$

On constate que

$$tu_x + (1-t)u_y = \rho + u - \rho = u.$$

D'autre part,

$$\|u_x - x\| = \|u - \rho\| \leq \epsilon$$

et même pour  $u_y$  donc

$$B(tx + (1-t)y, \epsilon) \subset tB(x, \epsilon) + (1-t)B(y, \epsilon).$$

**4 ▷** Soit  $x, y$  dans l'intérieur de  $C$ . Il existe  $\epsilon > 0$  tels que  $B(x, \epsilon) \subset C$  et  $B(y, \epsilon) \subset C$ . Comme  $C$  est convexe, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$tB(x, \epsilon) + (1-t)B(y, \epsilon) \subset C$$

D'après la question précédente, cela donne

$$B(tx + (1-t)y, \epsilon) \subset C$$

donc tous les points du segment  $[x, y]$  sont dans l'intérieur de  $C$ .

**5 ▷** On a

$$\begin{aligned}\langle Au, v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle &\iff \langle -\rho Au + \rho f + u - u, v - u \rangle \leq 0 \\ &\iff u = P_K(\rho Au - \rho f + u),\end{aligned}$$

d'après le théorème 7.6 du poly.

**6 ▷** D'après le corollaire 7.8 du poly,  $P_K$  est Lipschitz donc

$$\begin{aligned}\|Sv_1 - Sv_2\| &\leq \|(\rho f - \rho Av_1 + v_1) - (\rho f - \rho Av_2 + v_2)\| \\ &\leq \|(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)\|.\end{aligned}$$

**7 ▷** En élevant au carré la relation précédente, il vient

$$\|Sv_1 - Sv_2\|^2 \|v_1 - v_2\|^2 + \rho^2 \|Av_1 - Av_2\|^2 - 2\rho \|v_1 - v_2\| \|Av_1 - Av_2\|.$$

En utilisant la continuité et la coercivité de  $A$ , on obtient

$$\|Sv_1 - Sv_2\|^2 \leq \|v_1 - v_2\|^2 (1 + C^2 \rho^2 - 2\rho\alpha).$$

**8 ▷** Soit  $Q$  la fonction polynomiale

$$Q(x) = C^2 x^2 - 2\rho\alpha x + 1.$$

Si  $0 < x < 2\alpha/C^2$  alors  $0 < Q(x) < 1$ . Pour un tel choix de  $\rho$ , la fonction  $S$  est contractante donc d'après le théorème du point dans les espaces de Banach, elle admet un unique point fixe. Ce point est bien le point  $u$  cherché.