

# Examen de mi-parcours AFC

Notes de cours et notes de TD autorisées  
Calculatrices interdites – Durée : 1h30 – 2 pages

Octobre 2023

## 1 Distance de Hausdorff

Soit  $(E, d)$  un espace métrique et  $\mathcal{X}$  l'ensemble de ses parties non vides, fermées et bornées. On rappelle que la distance d'un point  $x \in E$  à un ensemble  $A \subset E$  est définie par

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Pour  $\epsilon > 0$ , pour  $A \subset E$ , on note  $A_\epsilon$  l'épaississement de  $A$  de taille  $\epsilon$ , l'ensemble défini par

$$A_\epsilon = \{x, d(x, A) \leq \epsilon\}$$

1) Soit  $\rho > 0$  et  $\epsilon > 0$ . Montrer que si  $A \subset B_\rho$  où  $B_\rho$  est l'épaississement de taille  $\rho$  de  $B$ , alors

$$A_\epsilon \subset B_{\rho+\epsilon}.$$

DEFINITION 1.– On définit  $m$  sur  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$  par

$$m(A, B) = \max\left(\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\right).$$

DEFINITION 2.– On définit  $h$  une autre application sur  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$  par

$$h(A, B) = \inf\{\epsilon > 0, A \subset B_\epsilon \text{ et } B \subset A_\epsilon\}.$$

On veut d'abord montrer que  $m = h$ . Soit  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathcal{X}$ . On pose

$$\rho = m(A, B) \text{ et } \epsilon = h(A, B).$$

2) Montrer que

$$A \subset B_\rho \text{ et } B \subset A_\rho.$$

En déduire que  $\epsilon \leq \rho$ .

3) Montrer l'inégalité  $\rho \leq \epsilon$ .

4) Montrer que  $m(A, B) = 0$  si et seulement si  $A = B$ .

5) Soit  $A, B, C$  trois éléments de  $\mathcal{X}$ . Montrer que

$$m(A, C) \leq m(A, B) + m(B, C). \quad (1)$$

6) Conclure.

DEFINITION 3.— On dit d'un espace métrique  $(V, \rho)$  qu'il est précompact si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une famille finie de boules de rayon  $\epsilon$  qui recouvre  $V$  : il existe  $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$  tels que

$$V \subset \bigcup_{k=1}^n B(v_k, \epsilon).$$

On suppose que  $(E, d)$  est précompact, on veut montrer que  $(\mathcal{X}, m)$  l'est également. On fixe  $\epsilon > 0$  et l'on note  $(s_1, \dots, s_n)$  des points de  $E$  tels que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^n B(s_i, \epsilon).$$

On considère  $\mathcal{P}$  l'ensemble des sous-ensembles non vides de  $\{s_1, \dots, s_n\}$ .

7) Soit  $A \in \mathcal{X}$ . Montrer qu'il existe  $D \in \mathcal{P}$  telle que

$$m(A, D) \leq \epsilon. \quad (2)$$

On démontre de même que si  $(E, d)$  est complet alors  $(\mathcal{X}, m)$  l'est également. Autrement dit, si  $E$  est compact,  $\mathcal{X}$  est compact.

## 2 Solution d'un système

Soit  $\mathbf{R}^2$  muni de la norme

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|.$$

On définit l'application  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  par :

$$f(x, y) = \left( \frac{1}{4} \sin(x + y), 1 + \frac{2}{3} \arctan(x - y) \right).$$

8) Démontrer qu'il existe une constante  $k \in ]0, 1[$  que l'on précisera, telle que, quels que soient  $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2$ , on a

$$\|f(x, y) - f(x', y')\|_1 \leq k \|(x, y) - (x', y')\|_1.$$

*Indication : on se souviendra des dérivées de sin et arctan.*

9) En déduire que le système

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \sin(x + y) &= x \\ 1 + \frac{2}{3} \arctan(x - y) &= y \end{cases}$$

admet une unique solution dans  $\mathbf{R}^2$ .

10) Aurait-on pu appliquer la même méthode en utilisant la norme  $\|\cdot\|_\infty$  au lieu de la norme  $\|\cdot\|_1$  ?

*On pourra montrer que pour  $x > 0$ , proche de 0,*

$$\|f(x, -x) - f(0, 0)\|_\infty \geq \frac{4x}{3(1 + 4x^2)}.$$

## Correction

**1 ▷** Soit  $x \in A_\epsilon$ , par définition

$$d(x, A) \leq \epsilon. \quad (3)$$

De plus, quel que soit  $y \in A$ ,

$$d(y, B) \leq \rho. \quad (4)$$

Pour tout  $b \in B$ , pour tout  $y \in A$ , par l'inégalité triangulaire

$$d(x, b) \leq d(x, y) + d(y, b).$$

Par conséquent,

$$\inf_{y \in B} d(x, b) \leq d(x, y) + \inf_{y \in B} d(y, b)$$

ou

$$d(x, B) \leq d(x, y) + d(y, B).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} d(x, B) &\leq \inf_{y \in A} d(x, y) + \rho \\ &= d(x, A) + d(y, B) \\ &\leq \epsilon + \rho \end{aligned}$$

en vertu de (3) et (4)

**2 ▷** On note  $\rho = m(A, B)$  et  $\epsilon = h(A, B)$ .

Comme

$$\sup_{x \in A} d(x, B) \leq \rho,$$

on a de façon évidente

$$A \subset B_\rho.$$

De même,  $B \subset A_\rho$ . Par conséquent,  $\epsilon \leq \rho$ .

**3 ▷** Réciproquement, si

$$A \subset B_\epsilon \text{ et } B \subset A_\epsilon$$

alors

$$\sup_{x \in A} d(x, B) \leq \epsilon \text{ et } \sup_{y \in B} d(y, A) \leq \epsilon$$

donc  $\rho \leq \epsilon$ .

**4 ▷** Si  $m(A, B) = 0$  alors pour tout  $x \in A$ ,  $d(x, B) = 0$  donc  $x$  appartient à l'adhérence de  $B$ , qui est fermé donc appartient à  $B$ . Par conséquent,  $A \subset B$ . Symétriquement,  $B \subset A$  donc  $A = B$ .

**5 ▷** Notons

$$\rho = m(A, B) \text{ et } \tau = m(B, C).$$

On a

$$A \subset B_\rho \quad (5)$$

$$B \subset A_\rho \implies B_\tau \subset A_{\tau+\rho} \quad (6)$$

$$B \subset C_\tau \implies B_\rho \subset C_{\tau+\rho} \quad (7)$$

$$C \subset B_\tau \quad (8)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} A &\subset C_{\tau+\rho} \\ C &\subset A_{\tau+\rho}. \end{aligned}$$

Donc

$$h(A, C) \leq \rho + \tau = m(A, B) + m(B, C).$$

**6 ▷** Comme il est évident que  $m(A, B) = m(B, A)$ , on déduit des questions précédentes que  $m$  est une distance sur  $\mathcal{X}$ .

**7 ▷** Soit  $D = \{s \in \mathcal{P}, B(s, \epsilon) \cap A \neq \emptyset\}$ . Montrons (2). Remarquons que

$$\{s\}_\epsilon = B(s, \epsilon).$$

Soit  $x \in A$ , comme les boules centrées sur les  $s_i$  couvrent tout  $E$ , il existe forcément  $s \in D$  tel que  $x \in B(s, \epsilon)$  donc

$$\sup_{x \in A} d(x, D) \leq \epsilon.$$

Soit  $s \in D$ , comme  $B(s, \epsilon)$  rencontre  $A$ , la distance de  $s$  à  $A$  est inférieure à  $\epsilon$  donc

$$\sup_{s \in D} d(s, A) \leq \epsilon.$$

On a donc bien établi (2).

**8 ▷** On sait que

$$\begin{aligned} |\sin'(x)| &= |\cos(x)| \leq 1 \\ |\arctan'(x)| &= \frac{1}{1+x^2} \leq 1. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |\sin(x+y) - \sin(x'+y')| &\leq |(x+y) - (x'+y')| \leq |x-x'| + |y-y'| \\ |\arctan(x+y) - \arctan(x'+y')| &\leq |(x+y) - (x'+y')| \leq |x-x'| + |y-y'|. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|f(x, y) - f(x', y')\|_1 \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \|(x, y) - (x', y')\|_1.$$

On a donc  $k = 11/12 < 1$ .

**9 ▷** Le système se réécrit

$$f(x, y) = (x, y).$$

L'application  $f$  est contractante donc admet un unique point fixe dans  $\mathbf{R}^2$ .

**10 ▷** On a

$$f(0, 0) = (0, 0) \text{ et } f(x, -x) = (0, \frac{2}{3} \arctan(2x)).$$

La dérivée de  $h : (x \mapsto \arctan(2x))$  est

$$x \mapsto \frac{2}{1+4x^2}$$

et la dérivée seconde est

$$x \mapsto \frac{-16x}{(1+4x^2)^2} \leq 0.$$

La dérivée première est donc décroissante et

$$\inf_{y \in [0, x]} h'(y) \geq \frac{2}{1+4x^2}.$$

Par conséquent,

$$\|f(x, -x) - f(0, 0)\|_{\infty} \geq \frac{2}{3} \frac{2x}{1+4x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{4}{3}.$$

$f$  ne peut donc pas être contractante pour la norme infinie.