

Examen final AFC

Notes de cours et notes de TD autorisées
Calculatrices interdites – Durée : 2h – 3 pages
C'est long, la notation en tiendra compte.

Toutes les questions sont notées à peu près toutes sur le même nombre de points.

Janvier 2024

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On note $B_V(0, M)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon M dans V .

Définition 1. Un ensemble $K \subset V$ est relativement compact si son adhérence est compacte.

On admet la caractérisation suivante :

Théorème 1. Un ensemble $K \subset V$ est relativement compact si de toute suite de points de K , on peut extraire une sous-suite convergent dans V .

Définition 2. Une application linéaire continue S de V dans V est compacte si pour tout $M > 0$, $S(B_V(0, M))$ est relativement compacte dans V .

Les résultats de la Section 1 ne servent que dans la question 15. La Section 3 est indépendante de tout le reste.

1 Opérateurs compacts

- 1) Montrer que si V est de dimension infinie alors l'application identité de V ne peut pas être compacte.
- 2) Soit S et T deux opérateurs continus de V dans V . Montrer que si S est compact alors $S \circ T$ et $T \circ S$ sont compacts.

2 Un petit bout de théorie spectrale

On introduit pour tout $x, y \in [0, 1]$ la fonction

$$K(x, y) = \exp(-|x - y|),$$

dont on notera qu'elle est uniformément continue sur $[0, 1]^2$. On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme uniforme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Pour $f \in E$, on définit l'application linéaire $T_K f$ par

$$T_K f(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) \, dy. \quad (1)$$

- 3) Montrer que $T_K f$ est une fonction continue et que

$$\|T_K f\|_\infty \leq \|f\|_\infty. \quad (2)$$

- 4) En utilisant l'uniforme continuité de K et le théorème d'Arzela-Ascoli montrer que T_K est un opérateur compact.
- 5) Soit $f \in E$. En utilisant l'identité :

$$|x - y| = (x - y)\mathbf{1}_{\{x \geq y\}} + (y - x)\mathbf{1}_{\{x \leq y\}},$$

trouver une expression alternative de $T_K f$ qui permet de montrer aisément que $g = T_K f$ est de classe \mathcal{C}^2 et que

$$\forall x \in [0, 1], \quad g''(x) - g(x) = -2f(x), \quad g(0) = g'(0), \quad g(1) = -g'(1).$$

On pose

$$G = \{g \in \mathcal{C}^2([0, 1]), \quad g(0) = g'(0), g(1) = -g'(1)\}.$$

On a déjà $T_K(E) \subset G$. On veut maintenant montrer l'inclusion inverse. Soit $g \in G$, on pose

$$f = -\frac{g'' - g}{2} \text{ et } h = g - T_K(f).$$

- 6) Montrer que $h \in G$.
- 7) Montrer que $h'' = h$ puis que $h = 0$. Conclure.

On note $H = L^2(]0, 1[)$, l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs réelles de carré intégrable sur $]0, 1[$.

Dans tout ce qui suit, vous avez le droit d'invoquer les théorèmes de théorie de l'intégration sans nécessairement en vérifier les hypothèses vu que ce n'est pas le contrôle de ce cours là.

On note le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) \, dx \text{ et } \|f\|_H = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

On continue à noter T_K l'application qui à $f \in H$ associe $T_K f$ tel que défini par la formule (1).

- 8) Montrer que T_K est continu de H dans H et que $\|T_K\| \leq 1$.

Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- 9) Montrer que pour tout $f, g \in H$,

$$\langle T_K f, g \rangle = \langle f, T_K g \rangle.$$

- 10) En déduire que $\ker(T_K) = \text{Im}(T_K)^\perp$.

Indication : on rappelle que $f = 0 \iff \langle f, g \rangle = 0, \forall g \in H$.

- 11) Montrer que les fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans $]0, 1[$ appartiennent à G .

On admet que D l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans $]0, 1[$ est dense dans H .

- 12) Montrer que

$$D \subset G \subset T_K(H) \subset H. \tag{3}$$

où $T_K(H)$ est une autre notation pour $\text{Im}(T_K)$.

- 13) En déduire que $\text{Im}(T_K)$ est dense dans H puis que T_K est injectif.

On veut montrer que T n'est pas surjectif. On admet que T_K est compact comme opérateur de H dans H .

On suppose dans les deux dernières questions que T_K surjectif.

14) Quel théorème implique que T_K^{-1} est continue ?

15) En déduire une contradiction.

Indication : on pourra se référer à la Section 1.

3 Fonction convexe

On se place dans \mathbf{R}^2 . Les vecteurs sont représentés par des matrices colonnes. Leur transposé est donc un vecteur ligne de sorte que le produit scalaire euclidien peut s'écrire

$$\langle x, y \rangle = x^\top y$$

au sens du produit matriciel.

On rappelle qu'une matrice symétrique A est positive si et seulement si

$$\langle Av, v \rangle \geq 0, \forall v \in \mathbf{R}^2.$$

On se donne λ_1, λ_2 deux réels strictement positifs. On considère la fonction

$$f : (\mathbf{R}^{+*})^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \prod_{i=1}^2 (1 - e^{-x_i})^{\lambda_i}.$$

16) Préciser la fonction h positive telle que l'on puisse écrire la hessienne de f

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

sous la forme

$$H(x) = h(x) \left(yy^\top - \text{diag}(z) \right)$$

où pour $i = 1, 2$,

$$y_i = \lambda_i \frac{e^{-x_i}}{1 - e^{-x_i}} \text{ et } z_i = \frac{y_i}{1 - e^{-x_i}}$$

et $\text{diag}(z)$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les z_i ainsi définis.

Indication : Compte-tenu de l'énoncé, il suffit de calculer l'un des termes de la hessienne :)

17) Montrer que le domaine

$$\Delta = \{x \in (\mathbf{R}^{+*})^2, \sum_{i=1}^2 \lambda_i e^{-x_i} \leq 1\}$$

est convexe.

18) Montrer que f est concave sur Δ .

Correction

1 ▷ L'image de $B_V(0, 1)$ par l'identité est elle-même. Si $B_V(0, 1)$ est relativement compacte comme elle est fermée, elle est compacte. D'après le théorème de Riesz, V est dimension finie, ce qui est absurde.

2 ▷ Soit x_n une suite bornée, Tx_n l'est aussi par continuité de T . La suite $(S \circ T)x_n$ appartient à un compact donc on peut en extraire une sous-suite convergente.

Soit x_n une suite bornée, comme S est compacte, on peut extraire de Sx_n une sous suite convergente. Comme T est continue, l'image par T de cette sous suite est aussi convergente donc $T \circ S$ est compact.

3 ▷ On remarque une fois pour toute que

$$0 \leq K(x, y) \leq 1, \forall x, y.$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 K(x, y) f(y) \, dy \right| &\leq \int_0^1 |f(y)| \, dy \\ &\leq \|f\|_\infty \cdot 1 \end{aligned}$$

4 ▷ L'image de la boule unité fermée est bornée d'après la question précédente. D'autre part, pour toute fonction $f \in B_E(0, 1)$,

$$|T_K f(x) - T_K f(z)| \leq \sup_{y \in [0, 1]} |K(x, y) - K(z, y)|.$$

Soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|(x, y) - (x', y')\| \leq \delta \implies |K(x, y) - K(x', y')| \leq \epsilon.$$

En conséquence, si $|x - z| \leq \delta$,

$$|K(x, y) - K(z, y)| \leq \epsilon, \forall y \in [0, 1].$$

Par conséquent,

$$|x - z| \leq \delta \implies \sup_{f \in B_E(0, 1)} |T_K f(x) - T_K f(z)| \leq \epsilon.$$

Il s'ensuit que la famille des fonctions appartenant à $T_K(B_E(0, 1))$ est équicontinue. On conclut par le théorème d'Arzela-Ascoli.

5 ▷ On a

$$T_K f(x) = e^{-x} \int_0^x e^y f(y) \, dy + e^x \int_x^1 e^{-y} f(y) \, dy.$$

On a donc $T_K f$ de classe \mathcal{C}^2 avec

$$\begin{aligned} (T_K f)'(x) &= -e^{-x} \int_0^x e^y f(y) \, dy + f(x) + e^x \int_x^1 e^{-y} f(y) \, dy - f(x) \\ &= -e^{-x} \int_0^x e^y f(y) \, dy + e^x \int_x^1 e^{-y} f(y) \, dy \\ (T_K f)''(x) &= e^{-x} \int_0^x e^y f(y) \, dy - f(x) + e^x \int_x^1 e^{-y} f(y) \, dy - f(x) \\ &= T_K f(x) - 2f(x). \end{aligned}$$

Les égalités aux bords suivent aussi.

6 ▷ La fonction g est \mathcal{C}^2 donc $f \in E$ donc $T_K f$ est dans G . Comme G est un espace vectoriel, h somme de deux éléments de G est dans G .

7 ▷ On a

$$\begin{aligned} h'' &= g'' - (T_K f)'' \\ &= g'' - T_K f + 2f \\ &= g'' - T_K - g'' + g \\ &= h. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$h(x) = a \cos(x) + b \sin(x).$$

On a $h(0) = h'(0)$ donc $a = -b$. De plus,

$$h(1) = -h'(1) \iff a(\cos(1) - \sin(1)) = -a(-\sin(1) - \cos(1))$$

donc $a = 0$ et $h = 0$.

8 ▷ D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_0^1 K(x, y) f(y) \, dy \right)^2 \leq \int_0^1 K(x, y)^2 \, dy \times \int_0^1 f(y)^2 \, dy \leq \int_0^1 f(y)^2 \, dy.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 (T_K f(x))^2 \, dx \leq \int_0^1 \|f\|_H^2 \, dx = \|f\|_H^2.$$

D'où le résultat.

9 ▷ On a dit que l'on ne posait pas de question sur les interversions d'ordre dans les intégrales multiples. On écrit la définition, on permute les intégrales en x et y , on utilise la symétrie de K .

10 ▷ Si $f \in \ker T_K$ alors pour tout $g \in H$,

$$0 = \langle T_K f, g \rangle = \langle f, T_K g \rangle.$$

Par conséquent $f \in \text{Im}(T)^\perp$.

Réciproquement si $f \in \text{Im}(T)^\perp$,

$$0 = \langle f, T_K g \rangle = \langle T_K f, g \rangle$$

donc $T_K f = 0$.

11 ▷ La seule chose à vérifier est que les conditions aux bords sont satisfaites mais un compact dans $]0, 1[$ est inclus dans un intervalle $[a, b]$ avec $0 < a \leq b < 1$. Par conséquent, pour une telle fonction $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$.

12 ▷ On sait de la première partie que $G = T_K(E)$ et on a vu $D \subset G$. Comme $E \subset H$, $T_K(E) \subset T_K(H)$.

13 ▷ On prend les adhérences dans H de tous les termes de la suite d'inclusion (3). Comme

$$\overline{D} = H,$$

on a

$$\overline{\text{Im}(T_K)} = H.$$

De la question 10, on en déduit que le noyau de T_K est réduit à $\{0\}$ donc T_K est injectif.

14 ▷ Le théorème d'isomorphisme de Banach.

15 ▷ Si T_K est compact, d'après la question 2, $T_K \circ T_K^{-1} = I$ est compact, ce qui est contraire au résultat de 1.

16 ▷ On trouve $h = f$.

18 ▷ On doit trouver le signe de $\langle H(x)v, v \rangle$ pour tout $v \in \mathbf{R}^2$. Comme h est positive, cela revient à calculer

$$\begin{aligned} ((yy^\top - \text{diag}(z))v)^\top v &= v^\top (y^\top y - \text{diag}(z))v \\ &= (yv)^\top yv - v^\top \text{diag}(z)v \\ &= \sum_{i=1}^2 y_i^2 v_i^2 - z_i v_i^2. \end{aligned}$$

Maintenant, on a

$$\begin{aligned} y_i^2 - z_i &= y_i \left(\lambda_i \frac{e^{-x_i}}{1 - e^{-x_i}} - \frac{1}{1 - e^{-x_i}} \right) \\ &= y_i \frac{\lambda_i e^{-x_i} - 1}{1 - e^{-x_i}}. \end{aligned}$$

Sur Δ , le numérateur de chacune de ces fractions est négatif. Toutes les autres quantités sont positives donc $\langle H(x)v, v \rangle \leq 0$.